Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2022

CLASA a X-a – soluții și bareme

Problema 1. *Determinați* $x \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$ *pentru care:*

$$\log_x(1-x) + \log_2 \frac{1-x}{x} = \frac{1}{(\log_2 x)^2}.$$

Soluție. Notăm $a = \log_2 x$ și $b = \log_2(1-x)$; ecuația devine $\frac{b}{a} + b - a = \frac{1}{a^2}$, de unde se obține $(a+1)(a^2 - a - ab + 1) = 0$ **2p**

Dacă $a^2 - a - ab + 1 = 0$, cum $a \neq 0$ ($x \neq 1$), obținem $b = \frac{a^2 - a + 1}{a} = a + \frac{1}{a} - 1$, de unde $a + \frac{1}{a} = b + 1$ **1p**

Din $x \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$ rezultă $1 - x \in \left(\frac{1}{4}, 1\right)$, de unde $b = \log_2(1-x) \in (-2, 0)$ **1p**

Ca urmare, $a + \frac{1}{a} \in (-1, 1)$, imposibil, deoarece $a < 0$ și $t + \frac{1}{t} \leq -2$, pentru orice $t < 0$. **2p**

Rămâne că $a + 1 = 0$, pentru care se obține soluția (unică) $x = \frac{1}{2}$ **1p**

Problema 2. *Fie* z_1, z_2, z_3 *numere complexe de modul 1, cu proprietatea că* $|z_i - z_j| \geqslant \sqrt{2}$, *pentru orice* $i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$. *Demonstrați că*

$$|z_1 + z_2| + |z_2 + z_3| + |z_3 + z_1| \leqslant 3.$$

Soluție. Considerăm un reper cartezian xOy. Dacă A, B, C sunt punctele de afixe z_1, z_2, respectiv z_3, atunci triunghiul ABC este înscris în cercul de centru O și rază 1.

Arătăm că acest triunghi nu are unghiuri obtuze. Dacă, de exemplu, $\sphericalangle BAC > \pi/2$, atunci $m(\overset{\frown}{AB}) + m(\overset{\frown}{AC}) < \pi$, deci $\min\left\{m(\overset{\frown}{AB}), m(\overset{\frown}{AC})\right\} < \frac{\pi}{2}$.

Deducem astfel că $\min\{AB, AC\} < \sqrt{2}$, contradicție cu $|z_1 - z_2| \geqslant \sqrt{2}$ și $|z_1 - z_3| \geqslant \sqrt{2}$. Prin urmare, triunghiul ABC nu este obtuzunghic, deci punctul O se află în interiorul triunghiului sau pe una dintre laturi. **3p**

Fie M mijlocul lui BC. Atunci M are afixul $\frac{z_2 + z_3}{2}$, deci $|z_2 + z_3| = 2\,OM$ **1p**

Dacă unghiul A al triunghiului ABC este ascuțit, atunci $OM = OB \cdot \cos(\sphericalangle BOM)$. Cum $OB = 1$, iar $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BOM$, rezultă $OM = \cos A$ (relație care se verifică și dacă $A = \pi/2$, întrucât O și M coincid în acest caz). Ca urmare, $|z_2 + z_3| = 2\cos A$, și analog $|z_1 + z_3| = 2\cos B$, respectiv $|z_1 + z_2| = 2\cos C$. **2p**

Cum $\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}$, se obține concluzia **1p**

Problema 3. *Un număr natural $n \geq 4$ se numește* interesant *dacă există cel puțin un număr complex z de modul 1 pentru care $1 + z + z^2 + z^{n-1} + z^n = 0$.*

Determinați câte numere interesante sunt cel mult egale cu 2022.

Soluție. Din $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = 1$ obținem $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$, iar relația $1 + \overline{z} + \overline{z}^2 + \overline{z}^{n-1} + \overline{z}^n = 0$ conduce la $1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z^{n-1}} + \dfrac{1}{z^n} = 0$ sau $z^n + z^{n-1} + z^{n-2} + z + 1 = 0$; ținând cont de relația din ipoteză se deduce că $z^{n-2} = z^2$ sau $z^{n-4} = 1$ **3p**

Atunci $z^n + z^{n-1} + z^2 + z + 1 = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, de unde rezultă că $z^5 = 1$. Deducem că $5 \mid (n - 4)$, deci orice număr interesant are forma $n = 5k + 4$, $k \in \mathbb{N}$, pentru care condiția din enunț este verificată de orice $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ astfel încât $z^5 = 1$ **3p**

Din $4 \leq 5k + 4 \leq 2022$, deducem că există 404 numere *interesante* **1p**

Problema 4. *Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relația*

$$f\big(f(y - x) - xf(y)\big) + f(x) = y \cdot \big(1 - f(x)\big), \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

Soluție. Relația din enunț se rescrie

$$f\big(f(y - x) - xf(y)\big) = y - (y + 1)f(x), \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Pentru $x = 0$, din (1) rezultă $f\left(f(y)\right) = (1 - f(0)) \cdot y - f(0)$, $\forall y \in \mathbb{R}$, (2)........ **1p**

Presupunând $f(0) = 1$, ar rezulta că $(f \circ f)(y) = -1$, pentru orice $y \in \mathbb{R}$, (3). Prin compunere la stânga cu f în relația (1), din (3) ar rezulta că $f\big(y - (y+1)f(x)\big) = -1$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, relație din care, pentru $x \to f(x)$ și $y = -\dfrac{1}{2}$, obținem $f(0) = -1$, contradicție. Ca urmare, $f(0) \neq 1$. **2p**

Atunci funcția $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(y) = (1 - f(0)) \cdot y - f(0)$, este injectivă, iar cum $f \circ f = h$ (din relația (2)), rezultă că f este injectivă **1p**

Din (1), pentru $y = -1$, rezultă că $f\big(f(-1 - x) - xf(-1)\big) = -1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, de unde pentru $x \to -(x + 1)$, obținem:

$$f\big(f(x) + (x + 1)f(-1)\big) = -1, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Pentru $x = -1$, din (4) rezultă că $f\left(f(-1)\right) = -1$, iar relația (4) se rescrie:

$$f\big(f(x) + (x + 1)f(-1)\big) = f\left(f(-1)\right), \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Cum f este injectivă, deducem că $f(x) + (x + 1)f(-1) = f(-1)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, de unde, notând $a = -f(-1)$, rezultă că $f(x) = ax$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. **2p**

Înlocuind în relația (1) și efectuând calculele, obținem:

$$(a^2 - a) \cdot xy + (a^2 - a) \cdot x - (a^2 - 1) \cdot y = 0, \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

Reiese că $a^2 - a = a^2 + a = a^2 - 1 = 0$, de unde rezultă că $a = 1$. Singura soluție este $f(x) = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. **1p**