Ministerul Educației

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2022

CLASA a VIII-a – soluții și bareme

Problema 1. *Fie* $a, b, c \in (0, \infty)$. *Arătați că:*

a) $\sqrt{\dfrac{2a}{b+c}} \geqslant \dfrac{4a}{2a+b+c}$.

b) $\dfrac{b}{a} \cdot \sqrt{\dfrac{2a}{b+c}} + \dfrac{c}{b} \cdot \sqrt{\dfrac{2b}{c+a}} + \dfrac{a}{c} \cdot \sqrt{\dfrac{2c}{a+b}} \geqslant 3$.

Soluție. a) Ridicând la pătrat inegalitatea și făcând calculele, obținem inegalitatea echivalentă $2a \cdot (b+c-2a)^2 \geqslant 0$, de unde rezultă concluzia. **3p**

b) Folosind punctul a), obținem:

$$\frac{b}{a} \cdot \sqrt{\frac{2a}{b+c}} + \frac{c}{b} \cdot \sqrt{\frac{2b}{c+a}} + \frac{a}{c} \cdot \sqrt{\frac{2c}{a+b}} \geqslant \frac{4b}{2a+b+c} + \frac{4c}{2b+c+a} + \frac{4a}{2c+a+b}.$$ **1p**

Folosind inegalitatea lui Bergström, obținem:

$$E = \frac{(2b)^2}{2ab+b^2+bc} + \frac{(2c)^2}{2bc+c^2+ca} + \frac{(2a)^2}{2ac+a^2+ab} \geqslant \frac{(2a+2b+2c)^2}{a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca}.$$ **2p**

Este suficient să arătăm că $\dfrac{(2a+2b+2c)^2}{a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca} \geqslant 3$, ceea ce este echivalent cu $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$, inegalitate adevărată, de unde rezultă concluzia. **1p**

Problema 2. *Determinați numerele naturale nenule n pentru care numerele* $\dfrac{n}{[\sqrt{n+2}]}$ *și* $\dfrac{n+2}{[\sqrt{n}]}$ *sunt naturale. (Notația* $[a]$ *reprezintă partea întreagă a numărului real a.)*

Soluție. Notăm $\left[\sqrt{n+2}\right] = k \in \mathbb{N}^*$. Din inegalitatea părții întregi, rezultă:
$k^2 \leqslant n+2 < (k+1)^2$, deci $k - \dfrac{2}{k} \leqslant \dfrac{n}{k} < k+2-\dfrac{1}{k}$. **1p**

Pentru $k > 2$, obținem $\dfrac{n}{k} \in \{k, k+1\}$. **2p**

Dacă $\dfrac{n}{k} = k$, atunci $n = k^2$ și $\dfrac{n+2}{[\sqrt{n}]} = k + \dfrac{2}{k} \notin \mathbb{N}$. **1p**

Dacă $\dfrac{n}{k} = k+1$, atunci $n = k^2+k$ și $\dfrac{n+2}{[\sqrt{n}]} = k+1+\dfrac{2}{k} \notin \mathbb{N}$. **1p**

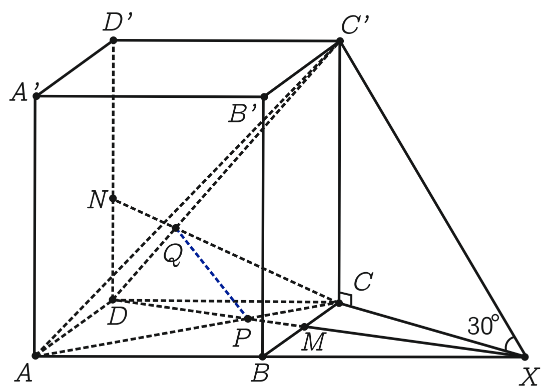
Pentru $k = 1$ obținem $n = 1$, iar pentru $k = 2$ rezultă $2 \leqslant n < 7$, iar condițiile din enunț sunt îndeplinite dacă $n \in \{1, 2, 4, 6\}$. **2p**

Observație. Aceste **2p** se acordă și în cazul în care se obțin toate soluțiile prin verificare directă.

Problema 3. *Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic și punctele M, N pe muchiile sale BC, respectiv DD', astfel încât $\dfrac{CM}{MB} = \dfrac{DN}{ND'} = k$. Notăm cu P intersecția dreptelor DM și AC, și cu Q intersecția dreptelor CN și DC'.*

a) Arătați că dreapta PQ este paralelă cu planul (ABC').

b) Dacă $\sphericalangle(PQ, (ABC)) = 30^\circ$, determinați valoarea lui k pentru care paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ este cub.



Soluție. a) Fie $\{X\} = DM \cap AB$. Atunci $C'X = (ABC') \cap (DMC')$ **1p**

Cum $DC \parallel AX$, triunghiurile DCM și XBM sunt asemenea, deci $\dfrac{CD}{BX} = \dfrac{CM}{BM} = k$. $(*)$

$DN \parallel CC'$, deci triunghiurile DQN și $C'QC$ sunt asemenea, iar $\dfrac{DQ}{QC'} = \dfrac{DN}{CC'} = \dfrac{k}{k+1}$.

$DC \parallel AX$, deci triunghiurile DPC și XPA sunt asemenea, iar $\dfrac{DP}{PX} = \dfrac{CD}{AX} \overset{(*)}{=} \dfrac{k}{k+1}$. . **2p**

Rezultă $\dfrac{DQ}{QC'} = \dfrac{DP}{PX}$ și din reciproca teoremei lui Thales deducem că $PQ \parallel C'X$. Deoarece $P \notin (ABC')$, iar $C'X \subset (ABC')$, obținem că $PQ \parallel (ABC')$ **1p**

b) Căutăm $k > 0$ astfel încât $ABCDA'B'C'D'$ să fie un cub de latură a.

Avem $\sphericalangle(PQ, (ABC)) = \sphericalangle(C'X, (ABC)) = \sphericalangle C'XC$. **1p**

În triunghiul $CC'X$ (cu $\sphericalangle C = 90^\circ$) avem $C'X = 2CC' = 2a$, iar $CX = a\sqrt{3}$.

Din $(*)$ rezultă că $BX = \dfrac{a}{k}$. Cu teorema lui Piagora în triunghiul BCX, deducem $3a^2 = CX^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{k^2}$, deci $k = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **2p**

Problema 4. *Un cub $\mathcal{C}$ de latură $n \geqslant 2$, $n \in \mathbb{N}$, este împărțit în n^3 cuburi de latură 1, cu interioarele disjuncte două câte două.*

Spunem că două dintre cuburile de latură 1 sunt olimpice*, dacă orice plan paralel cu oricare dintre fețele cubului $\mathcal{C}$ intersectează cel mult unul dintre interioarele acestor cuburi. Alegem cuburile $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_n$ olimpice două câte două, și notăm cu $O_1, O_2, \ldots, O_n$ centrele lor. Determinați valoarea minimă a sumei $O_1O_2 + O_2O_3 + \ldots + O_{n-1}O_n$ și stabiliți care sunt configurațiile formate din n cuburi de latură 1 pentru care se atinge acest minim.*

Soluție. Cerința ca două cuburi să fie *olimpice* revine la a spune că ele au cel mult un vârf comun, iar dreapta determinată de centrele lor nu este paralelă cu nicio față a cubului $\mathcal{C}$, deci pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ putem forma un paralelipiped dreptunghic P_k cu muchiile paralele cu cele ale cubului $\mathcal{C}$, pentru care O_k și O_{k+1} sunt vârfuri opuse **2p**

Cum paralelipipedul P_k are toate laturile de dimensiuni numere naturale nenule, rezultă că $O_kO_{k+1} \geqslant \sqrt{3}$, deci $O_1O_2 + O_2O_3 + \ldots + O_{n-1}O_n \geq (n-1)\sqrt{3}$. **1p**
Valoarea $(n-1)\sqrt{3}$ este atinsă atunci când punctele $O_1, O_2, \ldots, O_n$ sunt coliniare și se află, în această ordine, pe o diagonală a cubului $\mathcal{C}$.

Așadar $\min\{O_1O_2 + O_2O_3 + \ldots + O_{n-1}O_n\} = (n-1)\sqrt{3}$. **1p**

Arătăm că singurele configurații în care se atinge minimul sunt cele de mai înainte. Pentru a atinge acest minim, trebuie ca $O_1O_2 = O_2O_3 = \ldots = O_{n-1}O_n = \sqrt{3}$. Deoarece distanța de la centrul unui cub olimpic la oricare dintre vârfurile sale este de $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, rezultă că pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, cuburile olimpice cu centrele în O_k și O_{k+1} au exact un vârf comun. **1p**

Fie $\mathcal{C}_2 = ABCDA'B'C'D'$. Acest cub are un vârf comun cu fiecare dintre cuburile $\mathcal{C}_1$, respectiv $\mathcal{C}_3$. Fără a restrânge generalitatea, putem considera că $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ au în comun vârful A. Cuburile $\mathcal{C}_2$ și $\mathcal{C}_3$ au un vârf comun, care nu poate fi pe niciuna dintre fețele lui $\mathcal{C}_2$ care îl conțin pe A, deoarece atunci ar exista plane paralele cu una dintre fețele lui $\mathcal{C}$ care ar intersecta două dintre cuburile $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_3$. **1p**

Așadar vârful comun al cuburilor $\mathcal{C}_2$ și $\mathcal{C}_3$ este C', iar punctele O_1, A, O_2, C', O_3 sunt coliniare, O_2 fiind mijlocul segmentului O_1O_3. Se arată la fel că O_3 este mijlocul segmentului O_1O_3, ..., O_{n-1} este mijlocul segmentului $O_{n-2}O_n$. În concluzie, centrele tuturor cuburilor olimpice alese sunt coliniare. Suma diagonalelor acestor cuburi este de $n\sqrt{3}$, adică este egală cu lungimea diagonalei cubului $\mathcal{C}$, deci toate cuburile olimpice au centrele pe aceeași diagonală a cubului $\mathcal{C}$. **1p**

Observație. Pentru descrierea corectă a unei configurații minimale se acordă 2 puncte.