Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2022

CLASA a VII-a – soluții și bareme

Problema 1. *Fie I punctul de intersecție a bisectoarelor triunghiului ABC. Punctele D, E și F sunt mijloacele segmentelor IA, IB, respectiv IC, iar G, H și J sunt picioarele perpendicularelor duse din punctul I pe laturile AB, BC, respectiv CA.*

Demonstrați că punctele D, E, F, G, H și J sunt conciclice dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

Soluție. Punctul I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, deci este egal depărtat de laturile acestuia: $IG = IH = IJ$. **1p**

Dacă triunghiul ABC este echilateral (de centru I), atunci punctele A, D, I, H sunt coliniare, cu $AD = DI = IH$. Analog pentru punctele B, E, I, J, respectiv C, F, I, G. Întrucât $IG = IH = IJ$, deducem că punctele D, E, F, G, H și J aparțin cercului înscris în triunghi. **2p**

Reciproc, presupunem că D, E, F, G, H și J sunt conciclice. Cum punctele G, H și J determină un cerc (anume cercul înscris în triunghi, de centru I și rază r), înseamnă că D, E și F aparțin acestui cerc, prin urmare $ID = IE = IF = r$. **2p**

În triunghiul AGI dreptunghic în G avem $IG = r$, iar $AI = 2ID = 2r$. Rezultă că unghiul $\widehat{IAG}$ are măsura de $30°$. Însă AI este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$, așadar $\widehat{BAC}$ are măsura de $60°$. Analog se arată că unghiul $\widehat{ABC}$ are măsura de $60°$, deci triunghiul ABC este echilateral. **2p**

Problema 2. *Suma a n numere întregi consecutive este egală cu 2022. Determinați valorile posibile ale numărului natural nenul n.*

Soluție. Dacă toți termenii sumei sunt pozitivi, suma are forma $S = (m+1) + (m+2) + \ldots + (m+n)$, cu $m \in \mathbb{N}$. Obținem că $nm + \dfrac{n(n+1)}{2} = 2022$, de unde $n(2m+n+1) = 4044$. **2p**

Cum cei doi factori au parități diferite și primul este mai mic, avem posibilitățile $(n, 2m+n+1) \in \{(1, 4044), (3, 1348), (4, 1011), (12, 337)\}$.

Deducem că $(n, m) \in \{(1, 2021), (3, 672), (4, 503), (12, 162)\}$, prin urmare n poate lua valorile $1, 3, 4, 12$. **2p**

Dacă suma conține și termeni care nu sunt numere pozitive, aceasta va fi de forma $S = (-m) + (-m+1) + \ldots + m + (m+1) + \ldots + (m+k)$, unde $2m+k+1 = n$. Ținând seama de cele de mai sus, obținem pentru n și valorile $4044, 1348, 1011$ și 337. . . . . . **3p**

Problema 3. *Fie a, b și c trei numere reale strict pozitive.*

a) Dacă $a^2+ab+ac$, $b^2+ba+bc$ și $c^2+ca+cb$ sunt numere raționale, demonstrați că $a^2+b^2+c^2$ este tot un număr rațional.

b) Arătați că există $a, b, c > 0$ pentru care $a^2+ab+bc$, $b^2+bc+ca$ și $c^2+ca+ab$ sunt numere raționale, însă $a^2+b^2+c^2$ este un număr irațional.

Soluție. a) Notăm $a+b+c=s>0$. Din ipoteză știm că numerele sa, sb și sc sunt raționale pozitive, prin urmare $sa+sb+sc=s(a+b+c)=s^2$ este număr rațional nenul (chiar pozitiv). **2p**

Pe de altă parte, $(sa)^2=s^2a^2$ este număr rațional, deci $a^2=(s^2a^2):s^2$ este un număr rațional. Analog se arată că b^2 și c^2 sunt numere raționale, așadar suma $a^2+b^2+c^2$ este tot un număr rațional. **2p**

b) De exemplu, putem alege $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{3}$ și $c=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

Atunci $a^2+ab+bc=5\in\mathbb{Q}$, $b^2+bc+ca=4\in\mathbb{Q}$, $c^2+ca+ab=3\in\mathbb{Q}$, în timp ce $a^2+b^2+c^2=10-2\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}$. **3p**

Problema 4. *Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A. Punctul D este piciorul înălțimii din A, iar M este mijlocul ipotenuzei BC.*

Spunem că un punct X situat în interiorul triunghiului ABC este remarcabil dacă $AB=BX$, iar bisectoarea unghiului CXD trece prin punctul M.

a) Știind că există măcar un punct remarcabil, demonstrați că unghiul ABC are măsura de 60°.

b) Dacă unghiul ABC are măsura de 60°, arătați că orice punct situat pe arcul mic AM al cercului de centru B și rază AB este remarcabil.

Soluție. a) Fie X un punct remarcabil. Din asemănarea triunghiurilor ABC și DBA ($\widehat{ABC}\equiv\widehat{DBA}$ și $\widehat{BAC}=\widehat{BDA}=90^\circ$) rezultă că $\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{BC}{AB}$, deci $\dfrac{BX}{BD}=\dfrac{BC}{BX}$. Avem și $\widehat{XBC}\equiv\widehat{DBX}$, prin urmare $\Delta XBC\sim\Delta DBX$. Deducem că $\widehat{BCX}=\widehat{DXB}$...... **2p**

Atunci $\widehat{BMX}=\widehat{MXC}+\widehat{MCX}=\widehat{MXD}+\widehat{DXB}=\widehat{BXM}$, așadar triunghiul BXM este isoscel cu $BM=BX$. Astfel, $AB=BM=\dfrac{1}{2}BC$, de unde rezultă că $\widehat{ACB}=30^\circ$, deci $\widehat{ABC}=60^\circ$ **2p**

b) Fie X un punct situat pe arcul mic AM al cercului ω de centru B și rază AB și N al doilea punct de intersecție dintre acest cerc și dreapta BC. Se observă ușor că $BN=BM=2BD$, iar $\widehat{MXN}=90^\circ$. Pe dreapta CX considerăm punctele E și F astfel încât $DE\|XM$ și $DF\|XN$. Atunci $\dfrac{CF}{FX}=\dfrac{CD}{DN}=1$, iar $\dfrac{CX}{XE}=\dfrac{CM}{MD}=2$, prin urmare $CF=FX=XE$.. **1p**

Evident că $\widehat{EDF}=90^\circ$, prin urmare DX este mediana corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul dreptunghic DEF. Obținem că $DX=XF=\dfrac{1}{2}XC$. **1p**

Atunci $\dfrac{XD}{XC}=\dfrac{MD}{MC}=\dfrac{1}{2}$, iar din reciproca teoremei bisectoarei deducem că XM este bisectoarea unghiului DXC. Cum $BA=BX$ (ca raze în cercul ω), deducem că X este un punct remarcabil. **1p**