MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2022

CLASA a V-a – soluții și bareme

Problema 1. Am decupat din carton trei cifre nenule diferite. Dacă așez două dintre ele una lângă alta, în cele două moduri posibile, obțin două numere de câte două cifre, care sunt de 8, respectiv de 14 ori mai mari decât a treia cifră. Aflați cele trei cifre.

Gazeta Matematică

Soluție. Notăm cele trei cifre cu a, b, respectiv c.

Prima rezolvare. Numerele $8 \cdot c$ și $14 \cdot c$ au două cifre, deci c poate fi 2, 3, 4, 5, 6 sau 7 . . **2p**

Cazul $c = 2$ duce la $\overline{ab} = 16$ și $\overline{ba} = 28$ – imposibil; cazul $c = 4$ duce la $\overline{ab} = 32$ și $\overline{ba} = 56$ – imposibil; cazul $c = 5$ duce la $\overline{ab} = 40$ – imposibil; cazul $c = 7$ duce la $\overline{ab} = 56$ și $\overline{ba} = 98$ – imposibil **2p**

Cazul $c = 3$ duce la $\overline{ab} = 24$, $\overline{ba} = 42$, iar cazul $c = 6$ duce la $\overline{ab} = 48$, $\overline{ba} = 84$, deci avem soluțiile $(2, 4, 3)$ și $(4, 8, 6)$ **3p**

A doua rezolvare. Numerele $8 \cdot c$ și $14 \cdot c$ sunt pare, deci a și b sunt pare **2p**

Multiplii de 14 având două cifre pare nenule sunt $2 \cdot 14 = 28$, $3 \cdot 14 = 42$ și $6 \cdot 14 = 84$ . . **2p**

Deoarece $2 \cdot 8 = 16 \neq 82$, $3 \cdot 8 = 24$ și $6 \cdot 8 = 48$, soluțiile sunt $(2, 4, 3)$ și $(4, 8, 6)$ **3p**

Problema 2. Trei prietene au împreună 2022 de bile colorate: Alexia are numai bile roșii, Cristina are numai bile galbene, iar Lucia are numai bile albastre.

La un schimb, Alexia dăruiește câte 5 bile roșii fiecăreia dintre cele două prietene ale sale, Cristina dăruiește câte 7 bile galbene fiecăreia dintre cele două prietene, iar Lucia dăruiește câte 11 bile albastre fiecăreia dintre cele două prietene.

După mai multe astfel de schimburi, Lucia rămâne cu 400 de bile, iar Cristina rămâne cu 1082 de bile, dintre care 602 sunt bile galbene.

Aflați câte bile roșii a avut inițial Alexia.

Soluție. Cum Lucia rămâne cu 400 de bile, iar Cristina cu 1082 de bile, deducem că Alexia rămâne cu $2022 - 400 - 1082 = 540$ de bile **2p**

La un schimb, Cristina primește $5 + 11 = 16$ bile; cum ea a primit $1082 - 602 = 480$ de bile, au avut loc $480 : 16 = 30$ de schimburi **2p**

La un schimb, Alexia primește $7 + 11 = 18$ bile și dă $5 + 5 = 10$ bile, deci la fiecare schimb numărul bilelor ei crește cu 8. Deducem că Alexia a avut inițial $540 - 30 \cdot 8 = 300$ de bile . . **3p**

Problema 3. Demonstrați că, dacă n și m sunt numere naturale nenule astfel încât $2^n + 3^m$ este pătrat perfect, atunci și $2^n \cdot 3^m$ este pătrat perfect.

Soluție. Arătăm că n și m sunt numere pare **1p**

Dacă n este impar, atunci există k natural astfel încât $n = 2 \cdot k + 1$ și obținem $2^n + 3^m = 2^{2 \cdot k+1} + 3^m = 4^k \cdot 2 + 3^m = (3 + 1)^k \cdot 2 + 3^m = (\mathcal{M}_3 + 1) \cdot 2 + \mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_3 + 2$, care nu poate fi pătrat perfect. Așadar n este par, adică există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n = 2 \cdot k$ **3p**

Dacă m este impar, atunci există p natural astfel încât $m = 2 \cdot p + 1$ și obținem $2^n + 3^m = 2^n + 3^{2 \cdot p+1} = 2^{2 \cdot k} + 9^p \cdot 3 = 4^k + (8 + 1)^p \cdot 3 = \mathcal{M}_4 + (\mathcal{M}_4 + 1) \cdot 3 = \mathcal{M}_4 + 3$, care nu poate fi pătrat perfect. Deci și m este par, adică există $p \in \mathbb{N}^*$ cu $m = 2 \cdot p$ **2p**

Obținem $2^n \cdot 3^m = 2^{2 \cdot k} \cdot 3^{2 \cdot p} = (2^k)^2 \cdot (3^p)^2 = (2^k \cdot 3^p)^2$, care este pătrat perfect **1p**

Observație. Putem demonstra că singura pereche (n,m) *care verifică ipoteza este* $(4,2)$*, dar cunoștințele necesare depășesc nivelul clasei a V-a.*

Problema 4. Un număr natural va fi numit *special* dacă este de forma $\overline{abcd}$, cu a,b,c,d cifre nenule, iar numărul $a\cdot c+b\cdot d$ este pătrat perfect.

a) Determinați cel mai mic și cel mai mare număr special.

b) Demonstrați că suma tuturor numerelor speciale este divizibilă cu 101.

Soluție. a) Nu putem avea numere speciale mai mici decât un număr de forma $\overline{111x}$, iar cel mai mic x posibil este 3, deci cel mai mic număr special este 1113 .... **1p**

Nu putem avea numere speciale mai mari decât un număr de forma $\overline{999y}$, iar cel mai mare y posibil este 7, deci cel mai mare număr special este 9997 .... **1p**

b) Analizăm cazuri, după cum cifra miilor este sau nu egală cu cifra zecilor, iar cifra sutelor este sau nu egală cu cifra unităților.

Dacă $\overline{abcd}$ este special și $a\neq c$, $b\neq d$, atunci și numerele $\overline{adcb}$, $\overline{cbad}$, $\overline{cdab}$ sunt speciale și avem $\overline{abcd}+\overline{adcb}+\overline{cbad}+\overline{cdab}=(a+c)\cdot 2020+(b+d)\cdot 202=\mathcal{M}_{101}$ **1p**

Dacă $\overline{abad}$ este special și $b\neq d$, atunci și numărul $\overline{adab}$ este special și avem $\overline{abad}+\overline{adab}=a\cdot 2020+(b+d)\cdot 101=\mathcal{M}_{101}$ **1p**

Dacă $\overline{abcb}$ este special și $a\neq c$, atunci și numărul $\overline{cbab}$ este special și avem $\overline{abcb}+\overline{cbab}=(a+c)\cdot 1010+b\cdot 202=\mathcal{M}_{101}$ **1p**

Dacă $\overline{abab}$ este special, avem $\overline{abab}=(10\cdot a+b)\cdot 101=\mathcal{M}_{101}$ **1p**

În acest fel, numerele speciale sunt împărțite în grupe de patru tipuri, astfel încât fiecare număr apare în exact o grupă, iar suma numerelor din fiecare grupă este divizibilă cu 101, deci suma tuturor numerelor speciale este divizibilă cu 101 .... **1p**

Observație. Dacă se organizează altfel gruparea numerelor speciale și nu rezultă clar că fiecare număr este considerat exact o dată, nu se vor acorda acest ultim punct și punctele aferente cazurilor omise.