

# PROGRAMA OLIMPIADEI DE MATEMATICĂ pentru clasele VII-XII în anul școlar 2018/2019

## Clasa a VII-a

### • Etapa locală

#### ALGEBRĂ

**1. Mulțimea numerelor întregi; Mulțimea numerelor raționale; Mulțimea numerelor reale;**

**2. Modulul unui număr real.** Proprietățile modulului.

**3. Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real; Reguli de calcul cu radicali** (conținutul programei școlare).

a) Dacă  $a \in \mathbf{N}$  și  $\sqrt{a} \in \mathbf{Q}$ , atunci  $a \in \mathbf{N}$ ; b) Dacă  $a, b \in \mathbf{N}$  și  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbf{Q}$ , atunci  $\sqrt{a} \in \mathbf{N}$  și  $\sqrt{b} \in \mathbf{N}$ ; c) Dacă  $a$  și  $b$  nu sunt pătrate ale unor numere raționale, atunci  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \notin \mathbf{Q}$ ; d) Dacă  $a, b \in \mathbf{Q}^*$  și  $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}^*$  astfel încât  $\alpha\sqrt{a} + \beta\sqrt{b} \in \mathbf{Q}^*$ , atunci  $\sqrt{a} \in \mathbf{Q}$  și  $\sqrt{b} \in \mathbf{Q}$ ; e) Dacă  $a, b \in \mathbf{Q}^*$  astfel încât  $\sqrt{b} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ , atunci  $a \pm \sqrt{b} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  și  $a\sqrt{b} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ; f) Dacă  $a \in \mathbf{Q}^*$  și  $b \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ , atunci  $a + b \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  și  $ab \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ; g)  $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$ , unde  $a, b, c \in \mathbf{R}^*$  și  $c^2 = a^2 - b$

(formula radicalilor dubli).

#### GEOMETRIE

**1. Patrulere** (conținutul programei școlare).

**2. Asemănarea triunghiurilor**

Teorema lui Thales. Teorema reciprocă a teoremei lui Thales. Teorema paralelelor echidistante. Teorema paralelelor neechidistante. Linia mijlocie în triunghi; proprietăți. Centrul de greutate al unui triunghi; proprietăți. Linia mijlocie în trapez; proprietăți. Teorema fundamentală a asemănării. Criterii de asemănare a triunghiurilor. Teorema bisectoarei (interioare, exterioare) și teorema reciprocă.

**3. Probleme de coliniaritate. Probleme de concurență.**

Teorema lui Menelaos; teorema reciprocă. Teorema lui Ceva; teorema reciprocă.

### • Etapa județeană

#### ALGEBRĂ

**1. Calcul algebric; Calcule cu numere reale reprezentate prin litere** (conținutul programei școlare). Formalism algebric:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \forall a, b \in \mathbf{R} \text{ și } n \in \mathbf{N};$$

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}), \forall a, b \in \mathbf{R} \text{ și } n \in \mathbf{N}, n \text{ impar};$$

$$(a + b)^n = M_a + b^n, \text{ unde } a, b \in \mathbf{Z} \text{ și } n \in \mathbf{N}^*$$

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \text{ (identitatea lui Lagrange)}$$

#### GEOMETRIE

**1. Patrulere** (conținutul programei școlare).

**2. Asemănarea triunghiurilor**

Teorema lui Thales. Teorema reciprocă a teoremei lui Thales. Teorema paralelelor echidistante. Teorema paralelelor neechidistante. Linia mijlocie în triunghi; proprietăți. Centrul de greutate al unui triunghi; proprietăți. Linia mijlocie în trapez; proprietăți. Teorema fundamentală a asemănării. Criterii de asemănare a triunghiurilor. Teorema bisectoarei (interioare, exterioare) și teorema reciprocă.

### 3. Probleme de coliniaritate. Probleme de concurență.

Teorema lui Menelaos; teorema reciprocă. Teorema lui Ceva; teorema reciprocă.

## • Etapa națională

### ALGEBRĂ

#### 1. Inegalități. Sume. Probleme de maxim și de minim.

a.  $a^2 + b^2 \geq 2ab, \forall a, b \in \mathbf{R}$ ; b.  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc, \forall a, b, c \in \mathbf{R}$ ; c.  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \forall a, b \in \mathbf{R}_+^*$ ;

d.  $\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}, \forall a_i \in \mathbf{R}_+^*, i = \overline{1, n}$

,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$  (inegalitatea mediilor);

f.  $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2, \forall a_i, b_i \in \mathbf{R}, i = \overline{1, n}$  și

$\forall n \in \mathbf{N}^*$  (inegalitatea Cauchy – Buniakovski – Schwarz).

#### 2. Ecuații. Probleme.

#### 3. Elemente de organizare a datelor.

Conținutul programei școlare.

### GEOMETRIE

1. **Relații metrice în triunghi.** În triunghiul dreptunghic: teorema înălțimii; teorema catetei; teorema lui Pitagora; teoreme reciproce. Rapoarte constante în triunghiul dreptunghic: sin, cos, tg, ctg. Teorema lui Pitagora generalizată. Teorema cosinusului. Teorema sinusurilor. Teorema medianei:

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}.$$

$$\text{Arii: } A_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; A_\Delta = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}; A_\Delta = p \cdot r; A_\Delta = \frac{abc}{4R};$$

$$A_{\text{patrulater convex}} = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \sin(\hat{d}_1, d_2)}{2}.$$

#### 2. Cercul.

Definiție. Elemente în cerc. Unghiuri la centru. Măsura arcelor. Coarde și arce; proprietăți. Teorema unghiului înscris în cerc. Cerc înscris, cerc circumscris unui triunghi. Patrulater înscrisibil.

Patrulater circumscrisibil. Condiții de inscripibilitate, condiții de circumscrisibilitate. Dreapta lui Simson. Cercul lui Euler.

#### 3. Probleme elementare de loc geometric

## Clasa a VIII-a

### • Etapă locală/ Etapa județeană

#### ALGEBRĂ

##### 1. Numere reale

Conținutul programei

Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real. Ecuații. Modulul unui număr real. Ecuații.

Intervale. Intersecția și reuniunea intervalelor. Operații cu intervale. Inecuații.

Formulele de calcul prescurtat. Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere. Operații.

#### GEOMETRIE

##### 1. Puncte, drepte, plane. Paralelism.

La conținutul programei școlare se adaugă: teoreme de paralelism; teorema lui Menelaos în spațiu; teorema reciprocă teoremei lui Menelaos; teorema lui Thales în spațiu; axe de simetrie ale paralelipipedului dreptunghic; axa de simetrie a piramidei patrulateră regulată; simetria față de un plan; secțiuni axiale în corpurile care admit axe de simetrie.

##### 6. Proiecții ortogonale pe un plan

La conținutul programei școlare se adaugă: perpendiculara comună a două drepte; reciprocele teoremelor celor trei perpendiculare; plan mediator; plan bisector.

### • Etapa națională

#### ALGEBRA

1. Funcții- conținutul programei școlare.

2. Ecuații, inecuații și sisteme de ecuații- conținutul programei școlare

#### GEOMETRIE

1. Calcul de arii și volume (prisma, piramida, trunchiul de piramidă)- conținutul programei școlare

2. Corpuri rotunde- conținutul programei școlare

3. Probleme elementare de loc geometric

**Notă:** 1. La toate etapele olimpiadei de matematică (locală, județeană, națională), autorul problemelor din concurs va utiliza conținutul prezentei programe pentru olimpiadă.

2. Temele propuse vor cuprinde atât conținuturile obligatorii pentru toți elevii, cât și conținuturile suplimentare

3. Folosirea corectă de către elevi, în redactarea soluției, a unor teoreme fundamentale (fără demonstrație): teorema lui Steiner, teorema lui Ptolemeu, teorema lui Fermat și principiul inducției matematice etc. conduce la acordarea punctajului maxim prevăzut în baremele de corectare.

- Pentru fiecare clasă, în programa de olimpiadă sunt incluse în mod implicit conținuturile programelor de olimpiadă din clasele anterioare.
- Cunoștințele suplimentare față de programa școlară, ce apar în acest text, pot fi folosite în rezolvarea problemelor de olimpiadă fără demonstrații.

## CLASA a IX-a

### • Etapa locală

#### ALGEBRĂ

1. Elemente de logică și teoria mulțimilor.
2. Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale.
3. Funcții. Lecturi grafice.

#### GEOMETRIE și TRIGONOMETRIE

1. Vectori în plan.
2. Coliniaritate, concurență, paralelism - calcul vectorial în geometria plană.

### • Etapa județeană

#### ALGEBRĂ

1. Elemente de logică și teoria mulțimilor.
2. Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale.
3. Funcții. Lecturi grafice.
4. Funcția de gradul întâi.
5. Funcția de gradul al doilea.

Următoarele noțiuni și rezultate fac parte din programa suplimentară pentru etapa județeană :

Ecuatii în numere întregi :  $ax + by = c$ ;  $x^2 + y^2 = z^2$  ;

Teorema împărțirii cu rest în mulțimea numerelor întregi. Algoritmul lui Euclid;

Congruențe modulo  $n$ . Teoremele : Fermat, Wilson;

Mulțimi. Principiul includerii și excluderii;

Inegalitatea mediilor. Inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski. Inegalitatea lui Holder.

Inegalitatea lui Bernoulli. Inegalitatea lui Cebîsev;

Funcții injective, surjective, bijective;

Recurențe liniare de ordinul I și II .

#### GEOMETRIE și TRIGONOMETRIE

1. Vectori în plan.
2. Coliniaritate, concurență, paralelism - calcul vectorial în geometria plană.
3. Elemente de trigonometrie.

Următoarele noțiuni și rezultate fac parte din programa suplimentară pentru etapa județeană:

Teoreme de geometrie clasică. Teorema lui Stewart. Teorema lui Steiner. Dreapta lui

Euler. Drepte de tip Simson;

Puncte și linii importante;

Teoreme de concurență și coliniaritate;  
Relații metrice.

- **Etapa națională**

### **ALGEBRĂ**

**Toată materia**

**Următoarele noțiuni și rezultate fac parte din programa suplimentară pentru etapa națională :**

Mulțimi numărabile și nenumărabile ( $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$  sunt numărabile și  $\mathbf{R}$  este nenumărabilă). Densitatea în  $\mathbf{R}$  a mulțimilor  $\mathbf{Q}$  și  $\mathbf{R}/\mathbf{Q}$ . (orice interval deschis de numere reale conține atât numere iraționale cât și numere raționale). Teorema de densitate a lui Kronecker (dacă  $a$  este irațional, mulțimea valorilor șirului  $\{an\}$  este densă în  $[0,1]$ ). Indicatorul lui Euler:  $\varphi(n) =$  numărul numerelor prime cu  $n$ , mai mici decât  $n$ ; teorema lui Euler

### **GEOMETRIE și TRIGONOMETRIE**

**Toată materia**

**Notă.** Folosirea corectă de către elevi, în redactarea soluției, a unor teoreme fără demonstrație din cadrul programei de olimpiadă conduce la acordarea punctajului maxim prevăzut în baremele de evaluare.

### **CLASA a X-a**

- **Etapa locală**

### **ALGEBRĂ**

1. Mulțimi de numere
2. Funcții și ecuații -exclusiv ecuații trigonometrice

- **Etapa județeană**

### **ALGEBRĂ**

1. Mulțimi de numere
2. Funcții și ecuații
3. Metode de numărare

**Următoarele noțiuni și rezultate fac parte din programa suplimentară pentru etapa județeană :**

Convexitate în sensul lui Jensen, inegalități deduse din convexitate

## • Etapa națională

### ALGEBRĂ

Toată materia

Următoarele noțiuni și rezultate fac parte din programa suplimentară pentru etapa națională:

#### Polinoame

- C.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. și algoritmul lui Euclid pentru polinoame;
- Teorema fundamentală a algebrei. Teorema lui Bezout;
- Rădăcini multiple;
- Polinoame ireductibile;
- Relații între rădăcini și coeficienți;
- Polinoame simetrice, teorema fundamentală a polinoamelor simetrice, sumele lui Newton.

### GEOMETRIE

Toată materia

Următoarele noțiuni și rezultate fac parte din programa suplimentară pentru etapa națională:

- Elemente de geometrie în spațiu: Geometria tetraedrului, Poliedre
- Mulțimi convexe, înfășurătoarea convexă. Teorema lui Helly.

**Notă.** Folosirea corectă de către elevi, în redactarea soluției, a unor teoreme fără demonstrație din cadrul programei de olimpiadă conduce la acordarea punctajului maxim prevăzut în baremele de evaluare.

## CLASA a XI-a

### • Etapa locală

#### ALGEBRĂ SI GEOMETRIE

1. Elemente de algebră liniară și geometrie analitică (până la rezolvarea sistemelor liniare – exclusiv).

#### ANALIZĂ MATEMATICĂ

1. Mulțimea numerelor reale.
2. Șiruri de numere reale.
3. Limite de funcții.
4. Funcții continue

### • Etapa județeană

#### ALGEBRĂ SI GEOMETRIE

1. Elemente de algebră liniară și geometrie analitică (până la rezolvarea sistemelor liniare – exclusiv)

Următoarele noțiuni și rezultate fac parte din programa suplimentară pentru etapa județeană :

- Descompunerea unei permutări în produs de cicli disjuncți, respectiv transpoziții;
- Determinantul de ordin  $n$ ;
- Ecuatia caracteristică a unei matrice; Teorema Hamilton-Cayley;

Rangul unei matrice din  $M_{n,m}(C)$ ;

Inegalitatea lui Sylvester asupra rangului produsului a două matrice;

## **ANALIZĂ MATEMATICĂ**

**1. Mulțimea numerelor reale.**

**2. Șiruri de numere reale.**

**3. Limite de funcții.**

**4. Funcții continue.**

**Următoarele noțiuni și rezultate fac parte din programa suplimentară pentru etapa județeană :**

Mulțimi dense în  $\mathbf{R}$ , lema intervalelor închise (Cantor) Numărabilitate, numărabilitatea lui  $\mathbf{Q}$ , nenumărabilitatea lui  $\mathbf{R}$ ;

Puncte limită pentru șiruri;

Discontinuități de prima și a doua speță;

Continuitate uniformă;

Funcții cu proprietatea valorii intermediare (proprietatea lui Darboux).

### **• Etapa națională**

## **ALGEBRĂ SI GEOMETRIE**

**Toată materia**

**Următoarele noțiuni și rezultate fac parte din programa suplimentară pentru etapa națională :**

Polinom caracteristic, valori proprii;

Sisteme liniare de  $m$  ecuații cu  $n$  necunoscute.

## **ANALIZĂ MATEMATICĂ**

**Toată materia**

**Următoarele noțiuni și rezultate fac parte din programa suplimentară pentru etapa națională :**

Teorema lui Darboux;

Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange.

**Notă. Folosirea corectă de către elevi, în redactarea soluției, a unor teoreme fără demonstrație din cadrul programei de olimpiadă conduce la acordarea punctajului maxim prevăzut în baremele de corectare.**

## **CLASA a XII-a**

### **• Etapă locală/ Etapa județeană**

#### **ALGEBRĂ**

##### **1. Elemente de algebră (până la Corpuri - inclusiv)**

**Următoarele noțiuni și rezultate fac parte din programa suplimentară pentru etapa județeană :**

- Grupuri finite. Teorema lui Lagrange. Teorema lui Cauchy;
- Morfisme de structuri (semigrup, monoizi, etc);
- Grupuri finite generate;
- Grupul permutărilor, cicluri, descompunerea în produs de cicluri disjuncte;
- Subgrupuri clasice (centrul unui grup, centralizatorul unei mulțimi, nucleul și imaginea unui morfism);
- Elemente nilpotente și elemente idempotente;
- Orice corp finit este comutativ.

#### **ANALIZĂ MATEMATICĂ**

##### **1. Primitive**

##### **2. Integrala definită (până la teorema de existență a integralei unei funcții continue - inclusiv)**

**Următoarele noțiuni și rezultate fac parte din programa suplimentară pentru etapa județeană :**

- Sume Darboux, sume Riemann, integrabilitate;
- Mulțimi neglijabile Lebesgue. Criteriul lui Lebesgue

### **• Etapa națională**

#### **ALGEBRĂ**

**Toată materia**

#### **ANALIZĂ MATEMATICĂ**

**Toată materia**

**Notă. Folosirea corectă de către elevi, în redactarea soluției, a unor teoreme fără demonstrație din cadrul programei de olimpiadă conduce la acordarea punctajului maxim prevăzut în baremele de corectare.**