OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 20120

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX –a

PROBLEMA 1.

Să se determine funcţiile $f: N^* \to R$ cu proprietatea :

$$f(1) + 2 \cdot f(2) + 3 \cdot f(3) + \dots + n \cdot f(n) = f(n+1) - 1, \forall\, n \in N^*$$

Soluţie.

Pentru n=1 relația devine $f(2) = 1 + f(1)$. (1 punct)

Pentru n=2 relația devine $f(1) + 2f(2) = f(3) - 1 \Leftrightarrow f(3) = 3(1 + f(1))$. (1 punct)

Pentru n=3 relația dată conduce la $f(4) = 12 \cdot (1 + f(1))$. (1 punct)

Prin inducție se arată că $f(n) = \frac{n!}{2}(1 + f(1))$, pentru orice $n \geq 2$.(unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$)

(3 puncte)

Notând f(1)=a, unde a este un număr real, rezultă că funcțiile căutate sunt:

$$f: N^* \to R, f(n) = \begin{cases} a, & n = 1 \\ \frac{n!(a+1)}{2}, & n \geq 2 \end{cases}.$$

Total 6p!

Notă:

[1] *Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*
[2] *Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 20120

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX –a

PROBLEMA 2.

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\sqrt{x^2+31x}+\sqrt{x+31}=x+\sqrt{x}+8$$

Soluție:

$\sqrt{x(x+31)}+\sqrt{x+31}=\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)+8$

$\sqrt{x+31}\,(\sqrt{x}+1)=\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)+8$

$(\sqrt{x}+1)\left(\sqrt{x+31}-\sqrt{x}\right)=8$ 2p

notăm $a=\sqrt{x+31}$ *și* $b=\sqrt{x}$

$\begin{cases}(b+1)(a-b)=8\\ a^2-b^2=31\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(b+1)(a-b)=8\\ (a-b)(a+b)=31\end{cases}$ 2p

$a\neq b \Rightarrow \dfrac{b+1}{a+b}=\dfrac{8}{31} \Leftrightarrow a=\dfrac{23b+31}{8} \Rightarrow 15b^2+46b-33=0$ 2p

$b_1=-\dfrac{11}{3},\quad b_2=\dfrac{3}{5} \Longrightarrow x=\dfrac{9}{25}$ 2p

8p!

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*
[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 20120

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX –a

PROBLEMA 3.

Fie rombul $ABCD$ și punctele $M \in (AB), N \in (BC), P \in (CD)$. Să se arate că centrul de greutate al triunghiului MNP aparține dreptei AC dacă și numai dacă $AM + DP = BN$.

Soluție:

Fie R mijlocul lui $[NP]$ iar $MR \cap AC = \{G\}$

Considerăm $\frac{MG}{GR} = k, AB = a,$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{AM} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{AR} = \frac{1}{1+k}\frac{AM}{a}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{1+k}\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP}\right)$$

$$= \frac{1}{1+k}\frac{AM}{a}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{2(1+k)}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}\right) + \frac{k}{2(1+k)}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP}\right)$$

$$= \frac{AM}{(1+k)a}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{2(1+k)}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{2(1+k)}\frac{BN}{a}\overrightarrow{BC} + \frac{k}{2(1+k)}\overrightarrow{AD} + \frac{k}{2(1+k)}\frac{DP}{a}\overrightarrow{DC}$$

$$= \left(\frac{AM}{(1+k)a} + \frac{k}{2(1+k)} + \frac{kDP}{2a(1+k)}\right)\cdot\overrightarrow{AB} + \left(\frac{kBN}{2a(1+k)} + \frac{k}{2(1+k)}\right)\cdot\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AC} \text{ coliniari} \Leftrightarrow \frac{AM}{(1+k)a} + \frac{k}{2(1+k)} + \frac{kDP}{2a(1+k)} = \frac{kBN}{2a(1+k)} + \frac{k}{2(1+k)}$$

$$\frac{AM}{(1+k)a} + \frac{kDP}{2a(1+k)} = \frac{kBN}{2a(1+k)}$$

$$AM + \frac{k}{2}DP = \frac{k}{2}BN$$

$$G \text{ centru de greutate} \Leftrightarrow k = 2 \Leftrightarrow AM + DP = BN$$

Lipsă punctele!

Notă:

---

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;
[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 20120

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X –a

PROBLEMA 2.

Determinați $x, y \in (0, +\infty)$ astfel încât $\lg^2\left(\frac{x}{y}\right) = 3\lg\left(\frac{x}{2020}\right) \cdot \lg\left(\frac{2020}{x}\right)$.

$\frac{2020}{y}$.

Soluție:

Notăm $lg\ x - lg\ 2020 = a$ și $lg\ y - lg\ 2020 = b$

Avem $\lg\left(\frac{x}{y}\right) = \lg x - \lg y = a - b$. (1p)

Ecuația devine $(a - b)^2 = -3ab$, adică $a^2 + ab + b^2 = 0$. (3p)

Soluția unică a acestei ecuații omogene este a = b = 0. (2p)

Deci x = y = 2020 . (1p)

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 20120

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI –a

PROBLEMA 1.

$Fie\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^*), n \in \mathbb{N}\ impar$

$Dacă\ A \cdot A^t = I_n, arătați\ că\ det(A^2 - I_n) = 0$

Soluție:

$det(A^2 - I_n) = det(A^2 - A \cdot A^t) = det(A) \cdot det(A - A^t)$ (1) 2p

$Dar\ det(A - A^t) = det(A - A^t)^t = det(A^t - A) = (-1)^n det(A - A^t) = -det(A - A^t)$

$\Rightarrow det(A - A^t) = 0$ 3p

$\overset{(1)}{\Rightarrow} det(A^2 - I_n) = 0$ ....~~3p~~ 2p

8p!

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 20120

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI –a

PROBLEMA 3.

Determinați toate mulțimle $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$ cu proprietățile:

Lipsă punctaj!

i.) $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *nesingulare;*
ii.) $\forall X, Y \in \mathcal{A} \Rightarrow XY \in \mathcal{A}$.

Soluție:

Fie $X \in \mathcal{A}$, $\quad X \neq I_2 \Rightarrow X^n \in \mathcal{A}\ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists\, p, q \in \mathbb{N}$ *a.î.* $X^p = X^q$

$$\Rightarrow X^{p-q} = I_2 \Rightarrow I_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow X, I_2 \in \mathcal{A}$$

1) *Dacă* $X^2 = I_2$, *fie* $\mathcal{A} = \{I_2, X, Y\} = \{I_2, X, X^2, XY\} = \{X, I_2, XY\}$
Deci, $XY = Y \Rightarrow Y = I_2$, *contradicție*
2) *Dacă* $X^2 \neq I_2$ *cum* $X^2 \neq X \Rightarrow X^3 = I_2$ *deci,* $\mathcal{A} = \{I_2, X, X^2\}$

Determinăm toate matricele X cu $X^3 = I_2$

$$\det(X) = 1;\ X^2 - Tr(X) \cdot X + I_2 = 0_2 \Rightarrow X^2 = Tr(X) \cdot X - I_2 \Rightarrow$$

$$X^3 = Tr(X) \cdot X^2 - X \Rightarrow I_2 = Tr(X)(Tr(X) - I_2) - X \Rightarrow (Tr(x)^2 - 1)X = (Tr(X) + 1)\, I_2$$

Dacă $Tr(X) = -1 \Rightarrow X^2 + X + I_2 = 0_2$

Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + d = -1 \\ ad - bc = 1 \end{cases} \Rightarrow$ *există o infinitate de matrice X*

Dacă $Tr(X) \neq -1 \Rightarrow (Tr(X) - 1)X = I_2 \Rightarrow X = \dfrac{1}{Tr(X) - 1} \cdot I_2$ și

$$\det(x) = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{Tr(X) - 1}\right)^2 = 1 \Rightarrow Tr(x) = 2 \text{ sau } Tr(x) = 0 \text{ caz care nu convine}$$

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*
[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 20120

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII –a

PROBLEMA 2.

Pentru $m,n \in N^*$ notăm $I_{m,n} = \int_0^1 x^m tg^n x dx$. Să se calculeze $\lim\limits_{m\to\infty} I_{m,2020}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} I_{1,n}$.

Soluție (barem de corectare)

Funcția tangentă este crescătoare pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ rezultă că $0 \le tgx \le tg1 \quad \forall x \in [0,1]$,

deci $0 \le tg^{2020} x \le (tg1)^{2020} \quad \forall x \in [0,1]$ 1p

Atunci $0 \le I_{m,2020} = \int_0^1 x^m tg^{2020} xdx \le (tg1)^{2020} \int_0^1 x^m dx = \frac{(tg1)^{2020}}{m+1} \to 0, \Rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} I_{m,2020} = 0$

....2p

Fie $\alpha \in R$ astfel încât $\frac{\pi}{4} < \alpha < 1$ 1p

Rezultă $I_{1,n} = \int_0^1 xtg^n xdx \ge \int_\alpha^1 xtg^n xdx \ge \alpha \int_\alpha^1 tg^n xdx \ge \alpha \int_\alpha^1 tg^n \alpha dx = \alpha tg^n \alpha (1-\alpha)$ 2p

Cum $tg\alpha > 1$ și $1-\alpha > 0$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} I_{1,n} = \infty$ 1p

Iar este α! NU 0.

Notă:

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 20120

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII –a

PROBLEMA 3.

Considerăm H_1, H_2, H_3 subgrupuri ale lui $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ având *m, n* respectiv *p* elemente, unde *(m,n) = 1*, *(n,p) = 1* și *(m,p) = 1*. Să se determine numărul elementelor mulțimimii $H_1 \cup H_2 \cup H_3$.

Soluție:

H subgrup cu n elemente a lui $(\mathbb{C}^*, \cdot)$

$H = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \Rightarrow H = \{xx_1, x x_2, \dots, xx_n\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ *pentru* $\forall x \in H \Rightarrow$

$\Rightarrow (xx_1)(xx_2)\dots(xx_n) = x_1x_2\dots x_n \Rightarrow x^n = 1 \Rightarrow H = U_n$ ……………….. 2p

Dacă $(m,n) = 1$ *și* x_0 *rădăcină comună a ecuațiilor*

$x^m = 1$ *și* $x^n = 1 \Rightarrow \exists k, l \in \mathbb{Z}$ *și* $1 = km + \ln \Rightarrow$

$x_0 = x_0^{km+ln} = (x_0^m)^k \cdot (x_0^n)^l = 1$ ………………………….3p

Dacă notăm *n(A)* numărul de elemente ale mulțimii *A*$\Rightarrow$

$n(H_1 \cup H_2 \cup H_3) =$

$= n(H_1) + n(H_2) + n(H_3) - n(H_1 \cap H_2) - n(H_1 \cap H_3) - n(H_2 \cap H_3) + n(H_1 \cap H_2 \cap H_3)$

$= m + n + p + 2$ ………………………………2p

$= m + n + p - 2$ (NU $+2$).

Notă: