Ministerul Educației Naționale
romania2019.eu
Președinția României la Consiliul Uniunii Europene
Societatea de Științe Matematice din România

Matematika tantárgyverseny
Megyei (Bukarestben szektori) forduló, 2019. március 16.

XII. OSZTÁLY

1. feladat. Legyen n egy nemnulla természetes szám ésa G egy véges csoport, amelynek rendje n. Egy $f\colon G \to G$ függvény (P) tulajdonságú, ha $f(xyz) = f(x)f(y)f(z)$ bármely x, y, $z \in G$ esetén.

(a) Ha n páratlan, igazold, hogy bármely (P) tulajdonságú függvény a G csoport egy endomorfizmusa!

(b) Igaz-e az **(a)** pontbeli állítás, ha n páros?

Gazeta Matematică

2. feladat. Legyen n egy nemnulla természetes szám és $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ egy integrálható függvény. Igazold, hogy a $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ zárt intervallumban van olyan c pont, amelyre

$$\int_c^{c+\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{vagy} \quad \int_0^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{c+\frac{1}{n}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. feladat. A G véges csoport elemei x_1, …, x_n. Tekintsük az $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ mátrixot úgy, hogy $a_{ij} = 0$, ha $x_i x_j^{-1} = x_j x_i^{-1}$ és $a_{ij} = 1$ ellenben. Határozd meg a $\det(a_{ij})$ egész szám paritását!

4. feladat. Adott az $a > 1$ valós szám. Határozd meg azokat a $b \ge 1$ valós számokat, amelyekre

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x (1 + t^a)^{-b}\,\mathrm{d}t = 1.$$

Munkaidő 4 óra.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.