Ministerul Educației Naționale
romania2019.eu
Președinția României la Consiliul Uniunii Europene
Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 16 martie 2019

CLASA a XII-a

Problema 1. Fie n un număr natural nenul şi fie G un grup finit de ordin n. O funcţie $f\colon G \to G$ are proprietatea (P), dacă $f(xyz) = f(x)f(y)f(z)$, oricare ar fi x, y, z din G.

(a) Dacă n este impar, arătaţi că orice funcţie care are proprietatea (P) este un endomorfism al lui G;

(b) Dacă n este par, rămâne adevărată concluzia de la punctul **(a)**?

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie n un număr natural nenul şi fie $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă. Arătaţi că există un punct c în intervalul închis $\left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$, astfel încât

$$\int_c^{c+\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{sau} \quad \int_0^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{c+\frac{1}{n}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Problema 3. Fie G un grup finit şi fie $x_1, \ldots, x_n$ o enumerare a elementelor sale. Considerăm matricea $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$, unde $a_{ij} = 0$, dacă $x_i x_j^{-1} = x_j x_i^{-1}$, şi $a_{ij} = 1$, în caz contrar. Determinaţi paritatea numărului întreg $\det(a_{ij})$.

Problema 4. Fie a un număr real, $a > 1$. Determinaţi numerele reale $b \ge 1$ astfel încât

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x (1+t^a)^{-b}\,\mathrm{d}t = 1.$$

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.