MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
romania2019.eu
Președinția României la Consiliul Uniunii Europene
Societatea de Științe Matematice din România

Matematika tantárgyverseny
Megyei (Bukarestben szektori) forduló, 2019. március 16.

XI. OSZTÁLY

1. feladat. Az $(a_n)_{n\geq 1}$ egy olyan szigorúan pozitív valós számokból álló sorozat, amelyre az $(a_{n+1}-a_n)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens és határértéke nem nulla. Számítsd ki a

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n.$$

határértéket!

Gazeta Matematică

2. feladat. Legyen $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ és $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Igazold, hogy létezik olyan z komplex szám, amelyre $|z|=1$ és

$$Re(\det(A+zB))\geq\det(A)+\det(B),$$

ahol $Re(w)$ a w komplex szám valós részét jelöli.

3. feladat. Legyen n egy páratlan természetes szám és $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ olyan mátrixok, amelyekre $(A-B)^2=O_n$. Igazold, hogy $\det(AB-BA)=0$.

4. feladat. Az $f:[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ folytonos függvényre $f(0)>0$ és bármely $0\leq x<y$ számra fennállnak az $x-y<f(y)-f(x)\leq 0$ egyenlőtlenségek.
Igazold, hogy:
a) Létezik egyetlen egy olyan $\alpha\in(0,\infty)$ szám, amelyre $(f\circ f)(\alpha)=\alpha$.
b) Az $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_1\geq 0$, $x_{n+1}=f(x_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ sorozat konvergens.

Munkaidő 4 óra.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.