Ministerul Educației Naționale
romania2019.eu
Președinția României la Consiliul Uniunii Europene
Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 16 martie 2019

CLASA a XI-a

Problema 1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale strict pozitive, cu proprietatea că şirul $(a_{n+1}-a_n)_{n\geq 1}$ este convergent, cu limita nenulă. Calculaţi limita

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n.$$

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, şi $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Arătaţi că există un număr complex z, cu $|z|=1$, având proprietatea că

$$\operatorname{Re}(\det(A+zB))\geq \det(A)+\det(B),$$

unde $\operatorname{Re}(w)$ reprezintă partea reală a numărului complex w.

Problema 3. Fie n un număr natural impar şi $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cu proprietatea că $(A-B)^2=O_n$. Arătaţi că $\det(AB-BA)=0$.

Problema 4. Fie $f:[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ o funcţie continuă, cu $f(0)>0$, având proprietatea că pentru orice $0\leq x<y$ au loc inegalităţile $x-y<f(y)-f(x)\leq 0$. Arătaţi că:
a) Există un unic număr $\alpha\in(0,\infty)$ cu proprietatea că $(f\circ f)(\alpha)=\alpha$.
b) Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin $x_1\geq 0$ şi $x_{n+1}=f(x_n)$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$, este convergent.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.