MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
romania2019.eu
Preşedinţia României la Consiliul Uniunii Europene
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti,
16 martie 2019
CLASA a IX-a

Problema 1. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ şi numerele strict pozitive $a_1, a_2, ..., a_n$, respectiv $b_1, b_2, ..., b_n$ astfel încât $a_1 + a_2 + ... + a_n = b_1 + b_2 + ... + b_n = S$.

a) Demonstraţi că $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k + b_k} \geq \frac{S}{2}$.

b) Demonstraţi că $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k + b_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{a_k + b_k}$.

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie H ortocentrul triunghiului ascuţitunghic ABC. În planul triunghiului ABC considerăm un punct X astfel încât triunghiul XAH este dreptunghic isoscel cu ipotenuza AH, iar B şi X sunt de o parte şi de alta a dreptei AH. Demonstraţi că $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XH} = \overrightarrow{XB}$ dacă şi numai dacă $\measuredangle BAC = 45°$.

Problema 3. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un şir de numere reale cu proprietatea

$$2(a_1 + a_2 + ... + a_n) = n a_{n+1},$$

pentru orice $n \geq 1$.

a) Demonstraţi că şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este o progresie aritmetică.

b) Dacă $[a_1] + [a_2] + ... + [a_n] = [a_1 + a_2 + ... + a_n]$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, demonstraţi că toţi termenii şirului sunt numere întregi. (cu $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului real x)

Problema 4. Determinaţi toate numerele naturale nenule p pentru care există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $p^n + 3^n$ să dividă numărul $p^{n+1} + 3^{n+1}$.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.