Ministerul Educației Naționale
romania2019.eu
Președinția României la Consiliul Uniunii Europene
Societatea de Științe Matematice din România

Nationale Mathematikolympiade
Kreis- und Sektoren der Stadt Bucharest Etappe, 16. März 2019

VII-te KLASSE

Aufgabe 1. Bestimmt die ganzen Zahlen a, b, c, für welche folgende Beziehung gilt:

$$\frac{a+1}{3}=\frac{b+2}{4}=\frac{5}{c+3}.$$

Gazeta Matematică

Aufgabe 2. Es sei D der Mittelpunkt der Grundlinie $[BC]$ des gleichschenkligen Dreiecks ABC, in welchem $m(\angle BAC)<90^\circ$. Der Punkt E auf der Senkrechten in B auf der Geraden BC sei so, dass $\angle EAB \equiv \angle BAC$, und der Punkt F auf der Parallele durch C zu der Gerade AB sei so, dass F und D auf verschiedenen Seiten der Gerade AC liegen und $\angle FAC \equiv \angle CAD$. Beweist, dass $AE=CF$ und $BF=EF$.

Aufgabe 3. Man betrachtet die Mengen $M=\{0,1,2,\ldots,2019\}$ und

$$A=\left\{x\in M \,\middle|\, \frac{x^3-x}{24}\in\mathbb{N}\right\}.$$

a) Wie viele Elemente hat die Menge A?
b) Bestimmt die kleinste natürliche Zahl n, $n\geq 2$, mit der Eigenschaft, dass jede Untermenge mit n Elementen der Menge A zwei Elemente enthält, deren Differenz durch 40 teilbar ist

Aufgabe 4. Es sei ABC ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck, $m(\widehat{A})=90^\circ$, und $D\in(AB)$ der Punkt, so dass $AD=\frac{1}{3}AB$. In der von der Geraden AB und dem Punkt C bestimmten Halbebene betrachtet man den Punkt E, so dass $m(\angle BDE)=60^\circ$ und $m(\angle DBE)=75^\circ$. Die Geraden BC und DE schneiden sich einander im Punkt G, und die Parallele durch den Punkt G zu der Geraden AC schneidet die Gerade BE im Punkt H.
Beweist, dass das Dreieck CEH gleichseitig ist.

Arbeitszeit 4 Stunden.
Jede Aufgabe wird mit 7 Punkten bewertet.