Societatea de Științe
Matematice din România

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 18 martie 2017

CLASA a XII-a

Problema 1. Fie f, $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ funcţii continue, astfel încât $f(x)g(x) \geq 4x^2$, oricare ar fi $x \in [0,1]$. Arătaţi că cel puţin unul dintre numerele

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|, \quad \left|\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

este mai mare sau egal cu 1.

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie $(G,\cdot)$ un grup şi fie m şi n două numere naturale nenule, prime între ele. Arătaţi că, dacă funcţiile $f\colon G \to G$, $f(x) = x^{m+1}$, şi $g\colon G \to G$, $g(x) = x^{n+1}$, sunt endomorfisme surjective, atunci grupul G este comutativ.

Problema 3. Determinaţi cel mai mic număr real a, care îndeplineşte condiţia

$$a \geq \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(a_1 + \cdots + a_k),$$

oricare ar fi numărul natural nenul n şi oricare ar fi numerele reale strict pozitive $a_1, \ldots, a_n$, a căror sumă este cel mult π.

Problema 4. Fie $(A,+,\cdot)$ un inel cu $0 \neq 1$ şi care îndeplineşte simultan următoarele două condiţii:

(1) A nu este corp;
(2) $x^2 = x$, oricare ar fi elementul neinversabil x din A.

Arătaţi că:

(a) $a + x$ este neinversabil, oricare ar fi a şi x din A, a inversabil şi x nenul şi neinversabil;
(b) $x^2 = x$, oricare ar fi x din A.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.