Societatea de Ştiinţe Matematice
din România

Ministerul Educaţiei Naţionale

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 18 martie 2017

CLASA a X-a

Problema 1. a) Să se determine $x \in \mathbb{N}$ şi $y \in \mathbb{Q}$ dacă $\sqrt{x+\sqrt{x}} = y$.
b) Să se arate că există o infinitate de perechi $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ astfel încât $\sqrt{x+\sqrt{x}} = y$.

Gazeta Matematică

Problema 2. Determinaţi perechile (x, y) de numere întregi pentru care

$$2^x + \log_3 x = y^2 \text{ şi } 2^y + \log_3 y = x^2.$$

Problema 3. Fie $a \in (0, +\infty)$. Demonstraţi inegalitatea

$$a^{\sin x} \cdot (a+1)^{\cos x} \geq a,\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Problema 4. Fie $A = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = 1\}$.
a) Demonstraţi că $(|z+1| - \sqrt{2})(|z-1| - \sqrt{2}) \leq 0, \forall z \in A$.
b) Demonstraţi că pentru orice $z_1, z_2, \ldots, z_{12} \in A$ există o alegere a semnelor "$\pm$" pentru care

$$\sum_{k=1}^{12} |z_k \pm 1| < 17.$$

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.