



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 19 martie 2016
CLASA a 11-a

Enunțuri și bareme

Problema 1. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, astfel încât

$$\det(A^2 + A + I_2) = \det(A^2 - A + I_2) = 3.$$

Demonstrați că

$$A^2(A^2 + I_2) = 2I_2.$$

Supliment Gazeta Matematică

Soluție. Fie $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, $x, y, z, t \in \mathbb{C}$, $\alpha = \text{Tr}(A)$ și $\beta = \det(A)$.

Atunci $A^2 - \alpha A + \beta I_2 = O_2$, de unde $A^2 + A + I_2 = (1 + \alpha)A + (1 - \beta)I_2$.

Din $\det(A^2 + A + I_2) = 3$ reiese $\begin{vmatrix} (1 + \alpha)x + 1 - \beta & (1 + \alpha)y \\ (1 + \alpha)z & (1 + \alpha)t + 1 - \beta \end{vmatrix} = 3$.

Din $x + t = \alpha$ și $xt - yz = \beta$, obținem ecuația $(\alpha + 1)(\alpha + \beta) + (1 - \beta)^2 = 3$.

Analog obținem și $(\alpha - 1)(\alpha - \beta) + (1 - \beta)^2 = 3$ **3p**

Deducem că $\alpha + \alpha\beta = 0$ **1p**

Dacă $\alpha = 0$, atunci obținem $\beta = 2$ sau $\beta = -1$. Dacă $\beta = -1$ obținem $\alpha = 0$ **2p**

Avem $A^2 - I_2 = O_2$ sau $A^2 + 2I_2 = O_2$ și de aici concluzia..... **1p**

Problema 2. Fie $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$ și $k \in \mathbb{R}$ astfel încât $AC + kBD = I_n$ și $AD = BC$. Demonstrați că $CA + kDB = I_n$ și $DA = CB$.

Soluție. Pentru început considerăm $k \neq 0$. Fie $w \in \mathbb{C}$ astfel încât $w^2 = -k$. Considerăm matricele $X = A + wB$, $Y = C - wD$, $Z = A - wB$ și $U = C + wD$. Ipoteza conduce la $XY = I_n$ și $ZU = I_n$ **3p**

Atunci $YX = I_n$ și $UZ = I_n$ **1p**

Deducem $(CA + kDB) - w(DA - CB) = I_n$ și $(CA + kDB) + w(DA - CB) = I_n$, de unde se obține concluzia..... **2p**

Pentru $k = 0$ rezultă $AC = I_n$, de unde $CA = I_n$. Din $AD = BC$ și $CA = I_n$ deducem că $ADA = B$ și apoi $DA = CB$ **1p**

Problema 3. Determinați funcțiile continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) \leq f(x) + \frac{1}{n}, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R} \text{ și } n \in \mathbb{Z}^*.$$

Soluție: Prin inducție se demonstrează că $f(x+r) \leq f(x) + r$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $r \in \mathbb{Q}$ **2p**
 Continuitatea funcției f și densitatea lui \mathbb{Q} în \mathbb{R} conduc la $f(x+y) \leq f(x) + y$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $y \in \mathbb{R}$ **3p**
 Se obțin funcțiile $f_a(x) = x + a$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ cu $a \in \mathbb{R}$ **1p**
 Se verifică faptul că aceste funcții corespund ipotezei **1p**

Problema 4. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis și $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții care au proprietatea

$$\frac{f(x) - g(y)}{x - y} + |x - y| \geq 0, \text{ oricare ar fi } x, y \in I, x \neq y.$$

- i) Demonstrați că f și g sunt funcții crescătoare.
- ii) Dați exemplu de funcții $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \neq g$ care verifică relația din ipoteză.

Soluție. i) Din ipoteză rezultă $f(x) + (x - z)^2 \geq g(z) \geq f(y) - (z - y)^2$, oricare ar fi $x > z > y$, $x, y, z \in I$; în particular, $f(x) + (x - y)^2 \geq f(y)$, oricare ar fi $x > y$, $x, y \in I$ **1p**

Pentru $a, b \in I$, $a > b$, luând $n \in \mathbb{N}^*$ și $x_k = a - \frac{k}{n}(a - b)$, $k \in \overline{0, n}$ obținem $f(x_k) + (x_k - x_{k+1})^2 \geq f(x_{k+1})$, $k = \overline{0, n-1}$, iar prin adunare $f(a) + \frac{1}{n}(a - b)^2 \geq f(b)$. Cum această inegalitate este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, obținem prin trecere la limită $f(a) \geq f(b)$ **3p**

Analog, g este crescătoare **1p**

ii) Un exemplu cu $I = \mathbb{R}$ este $f(x) = 0$ pentru $x < 0$, $f(x) = 1$ pentru $x \geq 0$ și $g(x) = 0$ pentru $x \leq 0$, $g(x) = 1$ pentru $x > 0$ **2p**