Societatea de Ştiinţe Matematice
din România

Ministerul Educaţiei Naţionale
şi Cercetării Ştiinţifice

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 19 martie 2016
CLASA a XII-a

Problema 1. Un inel $(A, +, \cdot)$ are proprietatea (P) dacă A este finit şi grupul multiplicativ al elementelor sale inversabile este izomorf cu un subgrup diferit de $\{0\}$ al grupului aditiv $(A, +)$. Arătaţi că:

(a) Dacă un inel are proprietatea (P), atunci numărul elementelor sale este par.

(b) Pentru o infinitate de numere naturale n, există inele cu exact n elemente, care au proprietatea (P).

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie $f\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ o funcţie continuă şi periodică. Dacă 2 este perioadă a lui f, arătaţi că:

(a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{f(x+1)}{f(x)}\,\mathrm{d}x \geq 2$.

(b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{f(x+1)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = 2$ dacă şi numai dacă 1 este perioadă a lui f.

Problema 3. Fie p un număr prim impar şi fie G un grup care are exact $p+1$ elemente. Arătaţi că, dacă p divide numărul automorfismelor lui G, atunci $p \equiv 3 \pmod 4$.

Problema 4. Fie $f\colon [0,1] \to [0,1]$ o funcţie crescătoare şi fie

$$a_n = \int_0^1 \frac{1 + (f(x))^n}{1 + (f(x))^{n+1}}\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Arătaţi că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent şi calculaţi limita sa.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.