Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale şi Cercetării Ştiinţifice

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 19 martie 2016
CLASA a 11-a

Enunţuri

Problema 1. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, astfel încât

$$\det\left(A^2 + A + I_2\right) = \det\left(A^2 - A + I_2\right) = 3.$$

Demonstraţi că

$$A^2\left(A^2 + I_2\right) = 2I_2.$$

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie matricele $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$ şi $k \in \mathbb{R}$ astfel încât $AC + kBD = I_n$ şi $AD = BC$. Demonstraţi că $CA + kDB = I_n$ şi $DA = CB$.

Problema 3. Determinaţi funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) \leq f(x) + \frac{1}{n}, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R} \text{ şi } n \in \mathbb{Z}^*.$$

Problema 4. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis şi $f, g : I \to \mathbb{R}$ două funcţii care au proprietatea

$$\frac{f(x) - g(y)}{x - y} + |x - y| \geq 0, \text{ oricare ar fi } x, y \in I, x \neq y.$$

i) Demonstraţi că f şi g sunt funcţii crescătoare.

ii) Daţi exemplu de funcţii $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \neq g$ care verifică relaţia din ipoteză.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.