Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale şi Cercetării Ştiinţifice

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 19 martie 2016
CLASA a X-a

Problema 1. Determinaţi numerele reale $x \in (2, \infty)$ care sunt soluţii ale ecuaţiei

$$\cos\left(\pi \log_3 (x+6)\right) \cdot \cos\left(\pi \log_3 (x-2)\right) = 1.$$

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie $a, b, c \in \mathbb{C}^*$, distincte şi având acelaşi modul, astfel încât

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc = 0.$$

Demonstraţi că a, b, c reprezintă afixele vârfurilor unui triunghi dreptunghic sau echilateral.

Problema 3. Fie α şi β numere reale. Deteminaţi cea mai mare valoare a expresiei

$$|\alpha x + \beta y| + |\alpha x - \beta y|,$$

în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $|x| \leq 1$ şi $|y| \leq 1$;

b) $x, y \in \mathbb{C}$, astfel încât $|x| \leq 1$ şi $|y| \leq 1$.

Problema 4. a) Demonstraţi că există funcţii neperiodice $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică egalitatea

$$f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{5} f(x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$;

b) Demonstraţi că orice funcţie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică egalitatea

$$g(x+1) + g(x-1) = \sqrt{3} g(x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, este periodică.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.