Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale şi Cercetării Ştiinţifice

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 19 martie 2016
CLASA a 9-a

Problema 1. Fie $ABCD$ un pătrat şi E un punct situat pe diagonala BD, diferit de mijlocul acesteia. Se notează cu H şi K ortocentrele triunghiurilor ABE, respectiv ADE. Arătaţi că $\overline{BH} + \overline{DK} = 0$.

Problema 2. Fie a şi n două numere naturale nenule, astfel încât

$$\left\{\sqrt{n+\sqrt{n}}\right\} = \{\sqrt{a}\}$$

Arătaţi că $4a+1$ este pătrat perfect.

Problema 3. Fie numerele reale pozitive a, b, c, astfel încât

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} \leq 1.$$

Demonstraţi că:

$$\frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{a+c+1} + \frac{1}{a+b+1} \geq 1.$$

Gazeta Matematică

Problema 4. Fie $a \geq 2$ un număr natural. Arătaţi că afirmaţiile următoare sunt echivalente:

a) Există numerele naturale nenule b, c, astfel încât $a^2 = b^2 + c^2$;

b) Există un număr natural nenul d, astfel încât ecuaţiile $x^2 - ax + d = 0$ şi $x^2 - ax - d = 0$ au rădăcinile întregi.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.