



**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa Județeană și a Municipiului București, 19 martie 2016**  
**CLASA a VIII-a**

**Problema 1.** Arătați că într-o piramidă patrulateră regulată două fețe laterale opuse sunt perpendiculare dacă și numai dacă unghiul dintre două fețe laterale alăturate are măsura de  $120^\circ$ .

*Gazeta Matematică*

**Problema 2.** Pentru orice număr natural nenul  $n$  notăm cu  $x_n$  numărul numerelor naturale de  $n$  cifre, divizibile cu 4, formate cu cifrele 2, 0, 1 sau 6.

- Calculați  $x_1, x_2, x_3$  și  $x_4$ .
- Să se găsească numărul natural  $n$  astfel încât

$$1 + \left[ \frac{x_2}{x_1} \right] + \left[ \frac{x_3}{x_2} \right] + \left[ \frac{x_4}{x_3} \right] + \dots + \left[ \frac{x_{n+1}}{x_n} \right] = 2016,$$

unde  $[a]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $a$ .

**Problema 3.** a) Demonstrați că pentru orice număr întreg  $k$ , ecuația  $x^3 - 24x + k = 0$  are cel mult o soluție întreagă.

- Arătați că ecuația  $x^3 + 24x - 2016 = 0$  are exact o soluție întreagă.

**Problema 4.** Fie  $ABCD A' B' C' D'$  un paralelipiped dreptunghic și  $M$  respectiv  $N$  picioarele perpendicularelor duse din  $A'$  și  $C'$  pe  $BD$ . Lungimile muchiilor  $AB$ ,  $BC$  și  $AA'$  sunt egale cu  $\sqrt{6}$ ,  $\sqrt{3}$  și respectiv  $\sqrt{2}$ .

- Demonstrați că  $A'M \perp C'N$ .
- Calculați măsura unghiului dintre planele  $(A'MC)$  și  $(ANC')$ .

*Timp de lucru 4 ore.*

*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*