Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale şi Cercetării Ştiinţifice

Matematika tantárgyverseny
Megyei szakasz, 2016. március 19.
XII. OSZTÁLY

1. feladat. Egy $(A, +, \cdot)$ gyűrű (P) tulajdonságú, ha A véges és az invertálható elemeinek multiplikatív csoportja izomorf az $(A, +)$ additív csoport valamely nem $\{0\}$ részcsoportjával. Igazold, hogy

(a) Ha egy gyűrű (P) tulajdonságú, akkor elemeinek száma páros!

(b) Végtelen sok n természetes szám esetén létezik pontosan n elemű (P) tulajdonságú gyűrű!

Gazeta Matematică

2. feladat. Az $f\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ függvégy folytonos és periodikus. Ha 2 az f egy periódusa, akkor igazold, hogy

(a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{f(x+1)}{f(x)}\,\mathrm{d}x \geq 2.$

(b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{f(x+1)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = 2$ akkor és csak akkor, ha 1 az f egy periódusa!

3. feladat. Adott a p páratlan prímszám és G egy $p+1$ elemű csoport. Igazold, hogy ha p osztja a G csoport automorfizmusainak számát, akkor $p \equiv 3 \pmod 4$.

4. feladat. Adott az $f\colon [0,1] \to [0,1]$ növekvő függvény és

$$a_n = \int_0^1 \frac{1 + (f(x))^n}{1 + (f(x))^{n+1}}\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Igazold, hogy az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét!

Munkaidő 4 óra.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.