



Matematika tantárgyverseny
Megyei szakasz, 2016. március 19.
XI. OSZTÁLY

1. feladat. Az $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mátrix teljesíti a

$$\det(A^2 + A + I_2) = \det(A^2 - A + I_2) = 3.$$

egyenlőségeket. Bizonyítsd be, hogy

$$A^2(A^2 + I_2) = 2I_2.$$

Supliment Gazeta Matematică

2. feladat. Adottak az $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$, mátrixok és a $k \in \mathbb{R}$ szám úgy, hogy $AC + kBD = I_n$ és $AD = BC$. Bizonyítsd be, hogy $CA + kDB = I_n$ és $DA = CB$.

3. feladat. Határozd meg azokat az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényeket, amelyekre

$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) \leq f(x) + \frac{1}{n}, \text{ bármely } x \in \mathbb{R} \text{ és } n \in \mathbb{Z}^* \text{ esetén!}$$

4. feladat. Adott az $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvények, amelyekre

$$\frac{f(x) - g(y)}{x - y} + |x - y| \geq 0, \text{ bármely } x, y \in I, x \neq y \text{ esetén.}$$

i) Bizonyítsd be, hogy f és g növekvő függvények!

ii) Adj példát olyan $f \neq g$ függvényekre, amelyek teljesítik a feladatbeli feltételeket!

Munkaidő 4 óra.

Minden feladatra 7 pont szereshető.