



**Matematika tantárgyverseny**  
**Megyei szakasz, 2016. március 19.**  
**IX. OSZTÁLY**

**1. feladat.** Az  $ABCD$  négyzet  $BD$  átlóján vegyünk fel egy  $E$  pontot, ami nem felezőpontja  $BD$ -nek. Ha  $H$  és  $K$  az  $ABE$  és  $ADE$  háromszögek magasságpontjai, igazold, hogy  $\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{DK} = \vec{0}$ .

**2. feladat.** Az  $a$  és  $n$  nem nulla természetes számokra igaz, hogy

$$\left\{ \sqrt{n + \sqrt{n}} \right\} = \{ \sqrt{a} \},$$

ahol  $\{x\}$  az  $x$  valós szám törtrészét jelöli.

Igazold, hogy  $4a + 1$  négyzetszám!

**3. feladat.** Az  $a, b, c$ , pozitív valós számokra igaz az

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} \leq 1.$$

egyenlőtlenség. Bizonyítsd be, hogy:

$$\frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{a+c+1} + \frac{1}{a+b+1} \geq 1.$$

*Gazeta Matematică*

**4. feladat.** Adott az  $a \geq 2$  természetes szám. Igazold, hogy az alábbi két állítás egyenértékű:

a) Van olyan  $b$  és  $c$  nem nulla természetes szám, amelyre  $a^2 = b^2 + c^2$ ;

b) Van olyan  $d$  nem nulla természetes szám, amelyre az  $x^2 - ax + d = 0$  és  $x^2 - ax - d = 0$  egyenletek megoldásai egész számok!

*Munkaidő 4 óra.*

*Minden feladatra 7 pont szerezhető.*