Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei şi Cercetării Ştiinţifice

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 14 martie 2015

CLASA a XII-a

Problema 1. **(a)** Rezolvaţi ecuaţia $x^2 - x + \hat{2} = \hat{0}$, $x \in \mathbb{Z}_7$.

(b) Determinaţi numerele naturale $n \geq 2$, pentru care ecuaţia $x^2 - x + \hat{2} = \hat{0}$, $x \in \mathbb{Z}_n$, are soluţie unică.

Gazeta Matematică

Problema 2. **(a)** Calculaţi

$$\int_0^1 x \sin(\pi x^2)\,\mathrm{d}x.$$

(b) Calculaţi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \sin(\pi x^2)\,\mathrm{d}x.$$

Problema 3. Determinaţi funcţiile continue şi crescătoare $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, care îndeplinesc condiţia

$$\int_0^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t,$$

oricare ar fi $x, y \in [0, \infty)$.

Problema 4. Fie m şi n două numere naturale, $n \geq 2$, fie A un inel care are exact n elemente şi fie a un element al lui A, astfel încât $1 - a^k$ este inversabil, oricare ar fi $k \in \{m+1, m+2, \ldots, m+n-1\}$. Arătaţi că a este nilpotent (i.e., există un număr natural nenul p, astfel încât $a^p = 0$).

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte
Timp de lucru 4 ore