Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei şi Cercetării Ştiinţifice

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

Matematika tantárgyverseny
Megyei szakasz, 2015. március 14.
XII. OSZTÁLY

1. feladat (a) Oldd meg az $x^2 - x + \hat{2} = \hat{0}$ egyenletet, ha $x \in \mathbb{Z}_7$.

(b) Határozd meg azokat az $n \geq 2$ természetes számokat, amelyekre az $x^2 - x + \hat{2} = \hat{0}$ egyenletnek nincs $x \in \mathbb{Z}_n$ megoldása!

Gazeta Matematică

2. feladat (a) Számítsd ki:

$$\int_0^1 x \sin(\pi x^2)\,\mathrm{d}x.$$

(b) Számítsd ki:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \sin(\pi x^2)\,\mathrm{d}x.$$

3. feladat. Határozd meg azokat a folytonos és növekvő $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre

$$\int_0^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t,$$

bármely $x, y \in [0, \infty)$ esetén!

4. feladat. Adottak az m és n természetes számok ($n \geq 2$). Az A gyűrűnek pontosan n eleme van és a egy olyan eleme A-nak, amelyre $1 - a^k$ invertálható, bármely $k \in \{m+1, m+2, \ldots, m+n-1\}$ esetén. Igazold, hogy a nilpontens (azaz létezik olyan nem nulla p természetes szám, amelyre $a^p = 0$).

Munkaidő 4 óra.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.