Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei şi Cercetării Ştiinţifice

Matematika tantárgyverseny
Megyei szakasz, 2015. március 14.
XI. OSZTÁLY

1. feladat. Adott az $f : [0,1] \to [0,1]$ függvény, amelyre bármely $y \in [0,1]$ és bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $x \in [0,1]$ úgy, hogy $|f(x) - y| < \varepsilon$.

a) Igazold, hogy ha f folytonos a $[0,1]$ intervallumon, akkor f szürjektív!

b) Adj példát olyan f függvényre, ami teljesíti a feladatbeli feltételt és nem szürjektív!

2. feladat. Adottak az $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixok úgy, hogy $(A-B)^2 = O_2$.

a) Igazold, hogy $\det\left(A^2 - B^2\right) = (\det(A) - \det(B))^2$.

b) Bizonyítsd be, hogy $\det(AB - BA)$ akkor és csak akkor egyenlő 0-val, ha $\det(A) = \det(B)$.

Gazeta Matematică

3. feladat. a) Igazold, hogy ha a $k \geq 1$ és $n \geq 2$ természetes számokra létezik $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ úgy, hogy $A^3 = O_n$ és $A^k B + BA = I_n$, akkor $k = 1$ és n páros!

b) Igazold, hogy bármely $n \geq 2$ páros természetes számra létezik $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ úgy, hogy $A^3 = O_n$ és $AB + BA = I_n$.

4. feladat. Adott az $(x_n)_{n\geq 1}$ valós számsorozat, amelynek tagjai az $[1, \infty)$ halmazból vannak. Ha az $\left(y_n^{(k)}\right)_{n\geq 1}, y_n^{(k)} = \left[x_n^k\right],\ n \geq 1$, sorozat konvergens minden $k \in \mathbb{N}^*$ szám esetén, bizonyítsd be, hogy az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens! ($[a]$ az a valós szám egészrészét jelöli.)

Munkaidő 4 óra.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.