Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei şi Cercetării Ştiinţifice

Matematika tantárgyverseny
Megyei szakasz, 2015. március 14.
IX. OSZTÁLY

1. feladat. Az $ABCD$ paralelogramma átlói az O pontban metszik egymást. A DAC és DBC szögek szögfelezői a T pontban metszik egymást. Tudjuk, hogy $\overrightarrow{TD}+\overrightarrow{TC}=\overrightarrow{TO}$. Határozd meg az ABT háromszög szögeinek mértékét!

2. feladat. Határozd meg azokat az a és b valós számokat, amelyekre az

$$[ax+by]+[bx+ay]=(a+b)[x+y]$$

egyenlőség igaz bármely x és y valós szám esetén!($[t]$ a t valós szám egészrészét jelöli.)

3. feladat. Adottak az $m \geq 2$ és $n \geq 3$ természetes számok. Igazold, hogy létezik m darab különböző $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ természetes szám, amelyek mind oszthatók $n-1$-gyel és

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}-\ldots+(-1)^{m-1}\frac{1}{a_m}.$$

Gazeta Matematică

4. feladat. Határozd meg az összes olyan $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ függvényt, amelyre

$$d(x,f(y))\cdot m(f(x),y)=d(x,y)\cdot m(f(x),f(y)),$$

bármely $x,y\in\mathbb{N}^*$ esetén!

$d(a,b)$ és $m(a,b)$ az a és b természetes számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét jelölik.

Munkaidő 4 óra.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.