Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei şi Cercetării Ştiinţifice

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 14 martie 2015

CLASA a VIII-a

Problema 1. Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, arătaţi că are loc inegalitatea:

$$\sqrt{\frac{a}{-a+b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a-b+c}}+\sqrt{\frac{c}{a+b-c}} \geq 3.$$

Problema 2. Pentru orice număr natural a definim mulţimea

$$A_a=\left\{n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \sqrt{n^2+an} \in \mathbb{N}\right\}.$$

a) Arătaţi că mulţimea A_a este finită dacă şi numai dacă $a \neq 0$.
b) Determinaţi cel mai mare element al mulţimii A_{40}.

Gazeta Matematică

Problema 3. Determinaţi numărul de elemente ale mulţimii

$$M=\left\{(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{2016}}\right\}.$$

Problema 4. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ şi $\{O\}=AB' \cap A'B$. Pe muchia $[BC]$ se consideră un punct N astfel încât $AC' \parallel (B'AN)$. Ştiind că $D'O \perp (B'AN)$ demonstraţi că $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.