Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 8 Martie 2014
CLASA a IX-a
Soluţii şi bareme orientative

Problema 1. Să se determine numărul iraţional x ştiind că numerele $x^2 + x$ şi $x^3 + 2x^2$ sunt numere întregi.

Soluţie. Fie $x^2 + x = a$ şi $x^3 + 2x^2 = b$. Atunci $b - ax = x^2 = a - x$, deci $x(a-1) = b - a$. .... $4p$

Cum x e iraţional şi a, b sunt întregi, deducem $a = b = 1$, ... $2p$

deci $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .... $1p$

Problema 2. Se consideră triunghiul ABC şi punctele $D \in (BC)$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$ astfel încât

$$\frac{DB}{DC} = \frac{EC}{EA} = \frac{FA}{FB}.$$

Semidreptele $(AD$, $(BE$ şi $(CF$ intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în punctele M, N şi P. Să se arate că triunghiurile ABC şi MNP au acelaşi centru de greutate dacă şi numai dacă triunghiurile BMC, CNA şi APB au ariile egale.

Soluţie. Se arată uşor că

$$\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = 0. \qquad (*)$$

.... 2p

Notând ariile triunghiurilor ABC, BMC, CNA şi APB cu s, s_a, s_b, s_c, avem

$$\frac{DM}{AD} = \frac{s_a}{s},$$

deci

$$\frac{AM}{AD} = \frac{s + s_a}{s},$$

de unde

$$\overline{AM} = \frac{s + s_a}{s} \cdot \overline{AD},$$

şi analoagele. 3p

Triunghiurile ABC şi MNP au acelaşi centru de greutate dacă şi numai dacă

$$\overline{AM} + \overline{BN} + \overline{CP} = 0,$$

deci dacă şi numai dacă

$$\frac{s + s_a}{s} \cdot \overline{AD} + \frac{s + s_c}{s} \cdot \overline{BE} + \frac{s + s_c}{s} \cdot \overline{CF} = 0,$$

relaţie echivalentă cu

$$s_a \cdot \overline{AD} + s_b \cdot \overline{BE} + s_c \cdot \overline{CF} = 0.$$

Folosind $(*)$, relaţia precedentă este echivalentă cu

$$(s_a - s_c) \cdot \overline{AD} + (s_b - s_c) \cdot \overline{BE} = 0,$$

şi cum vectorii AD şi BE sunt necoliniari, egalitatea are loc dacă şi numai dacă $s_a = s_b = s_c$. 2p

Problema 3. Medianele AD, BE şi CF ale triunghiului ABC se intersectează în punctul G. Fie P un punct în interiorul triunghiului, nesituat pe niciuna dintre medianele acestuia. Dreapta care trece prin P şi este paralelă cu AD intersectează latura BC în punctul A_1. În mod analog se definesc punctele B_1 şi C_1. Să se arate că

$$\overline{A_1D} + \overline{B_1E} + \overline{C_1F} = \frac{3}{2}\overline{PG}.$$

Soluţie. Să ducem prin P paralele la laturile triunghiului. Dacă paralelele la AB şi AC intersectează latura BC în punctele A_B şi A_C, atunci triunghiurile ABC şi PA_BA_C sunt evident asemenea, şi cum PA_1 e paralelă cu mediana AD, rezultă că A_1 este mijlocul segmentului A_BA_C (a se vedea figura 1).

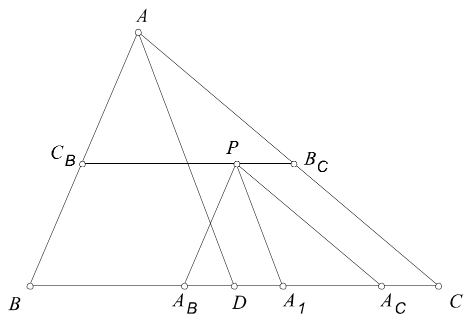

figura 1

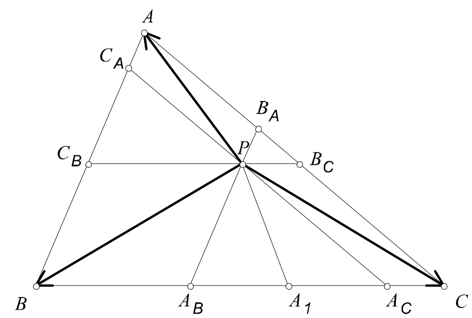

figura 2

Atunci

$$2\overline{A_1D} = \overline{A_1B} + \overline{A_1C} = \overline{A_BB} + \overline{A_CC} = \overline{PC_B} + \overline{PB_C}.$$

şi egalităţile similare. 3p

Deducem că suma $2\left(\overline{A_1D} + \overline{B_1E} + \overline{C_1F}\right)$ este egală cu

$$\overline{v} = \overline{PC_B} + \overline{PB_C} + \overline{PA_C} + \overline{PC_A} + \overline{PB_A} + \overline{PA_B}.$$

Dar

$$\overline{PC_A} + \overline{PB_A} = \overline{PA},$$

şi analoagele, ... 3p

deci

$$\overline{v} = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} = 3\overline{PG},$$

de unde concluzia. 1p

Problema 4. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ care au proprietăţile:
a) $f(m+n) - 1$ divide $f(m) + f(n)$, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$;
b) $n^2 - f(n)$ este pătrat perfect, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluţie. Se arată că $f(1) = 1$, $f(2) = 3$. 1p
Demonstrăm prin inducţie că $f(n) = 2n - 1$ 1p
Presupunând că $f(k) = 2k - 1$, din a) deducem $f(k+1) \le 2k + 1$ 3p
iar din b) deducem $f(k+1) \ge 2k + 1$ 2p