Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 9 Martie 2013

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VIII-a

Problema 1. Determinaţi tripletele de numere întregi (x, y, z) cu proprietatea că

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16(x + y + z).$$

Soluţie.

Egalitatea din enunţ revine la $(x-8)^2 + (y-8)^2 + (z-8)^2 = 192$ **2p**

Împărţind un pătrat perfect la 4 obţinem fie restul 0, fie restul 1. Numărul 192 este divizibil cu 4, prin urmare numerele $x-8$, $y-8$ şi $z-8$ sunt pare. Rezultă că există numerele întregi a_1, b_1, c_1 astfel încât $x-8=2a_1$, $y-8=2b_1$ şi $z-8=2c_1$. Astfel, ecuaţia iniţială devine $a_1^2+b_1^2+c_1^2=48$ **2p**

Repetând de două ori raţionamentul, găsim numerele întregi a_2, b_2, c_2 astfel încât $a_1 = 2a_2$, $b_1 = 2b_2$, $c_1 = 2c_2$, iar $a_2^2+b_2^2+c_2^2=12$, respectiv numerele întregi a_3, b_3, c_3 astfel încât $a_2 = 2a_3$, $b_2 = 2b_3$, $c_2 = 2c_3$, iar $a_3^2+b_3^2+c_3^2=3$. **1p**

Această egalitate este adevărată atunci când fiecare dintre numerele a_3, b_3, c_3 ia, la întâmplare, una dintre valorile 1 sau -1. .... **1p**

Ecuaţia din enunţ are deci soluţiile: $(0,0,0)$, $(0,0,16)$ $(0,16,0)$, $(16,0,0)$, $(0,16,16)$, $(16,0,16)$, $(16,16,0)$, $(16,16,16)$. **1p**

Problema 2. Determinaţi toate numerele reale x pentru care numărul $a = \dfrac{2x+1}{x^2+2x+3}$ este întreg.

Gazeta Matematică

Soluţie.

Dacă a este număr întreg nenul, atunci $|2x+1| \geq |x^2+2x+3|$. **2p**

Observăm că $x^2+2x+3 = (x+1)^2+2 > 0$ **1p**

Rezultă că $2x+1 \geq x^2+2x+3$ sau $2x+1 \leq -(x^2+2x+3)$, de unde $x^2+2 \leq 0$ respectiv $x^2+4x+4 \leq 0$. Prima inegalitate este imposibilă, iar a doua conduce la $x=-2$. **2p**

Pentru $x=-2$, avem $a=-1 \in \mathbb{Z}$ **1p**

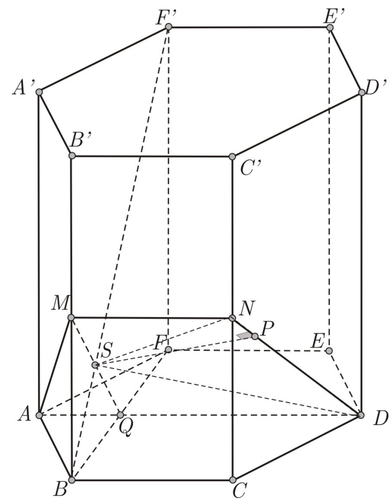
Numărul a este egal cu 0 pentru $x = -\frac{1}{2}$. În concluzie $x \in \{-2, -\frac{1}{2}\}$ **1p**

Problema 3. Fie prisma hexagonală regulată $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ cu muchia bazei $AB = 12$ şi înălţimea $AA' = 12\sqrt{3}$. Notăm cu N mijlocul muchiei CC'.

a) Demonstraţi că dreptele BF' şi ND sunt perpendiculare.

b) Aflaţi dinstanţa dintre dreptele BF' şi ND.

Soluţie.



a) Fie M mijlocul muchiei BB'; atunci $MN \| AD$, deci punctele A, D, M şi N sunt coplanare. Dreapta de intersecţie a planelor (BFF') şi (ADN) este MQ, unde Q este mijlocul segmentului $[BF]$. Observăm că $BFF'B'$ este pătrat şi atunci $BF' \perp MQ$. Apoi, $AD \perp (BFF')$, de unde $BF' \perp AD$. Rezultă că $BF' \perp (ADN)$, prin urmare $BF' \perp ND$.................. **3p**

b) Notăm cu S intersecţia dreptelor MQ şi BF' şi cu P proiecţia punctului S pe dreapta ND. Din $BF' \perp (ADN)$ deducem că $BF' \perp SP$, aşadar SP este perpendiculara comună a dreptelor BF' şi ND. **2p**

Pentru a afla lungimea segmentului $[SP]$, calculăm în două moduri aria triunghiului SND. Avem:

$$\mathcal{A}_{SND} = \mathcal{A}_{MNDQ} - \mathcal{A}_{SDQ} - \mathcal{A}_{SMN} = \frac{1}{2} SP \cdot ND.$$

Cum $MN = 12$, $QD = 18$, $ND = 6\sqrt{7}$, $MQ = 6\sqrt{6}$, obţinem $SP = \dfrac{15\sqrt{42}}{7}$........... **2p**

Problema 4. Considerăm numărul natural nenul fixat n. Determinaţi numerele naturale nenule $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1}$ cu proprietatea că

$$x_n \cdot x_{n+1} \leq 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

Soluţie.

Observăm că $x_n x_{n+1} \leq 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \leq 2(1 + 2 + \cdots + x_n) = x_n(x_n + 1)$.(1) De aici rezultă că $x_{n+1} \leq x_n + 1$.. **2p**

Cum x_n şi x_{n+1} sunt numere naturale cu $x_n < x_{n+1}$, deducem că $x_{n+1} = x_n + 1$. **2p**

Atunci toate inegalităţile din (1) se vor transforma în egalităţi. Din $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 + 2 + \cdots + x_n$ şi $x_n \geq n$, rezultă că $x_n = n$ şi, apoi, $x_k = k$ pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. **3p**

Notă. *Pentru observarea faptului că $x_n \geq n$ (sau în general că $x_k \geq k$, $k = \overline{1,n}$) se acordă* ***1 punct.***