

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană și a Municipiului București, 9 Martie 2013

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VII-a

Problema 1. Arătați că ecuația:

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{1006}} + \frac{1}{\sqrt{2012 - x} + \sqrt{1006}} = \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{2012 - x}}$$

are 2013 soluții în mulțimea numerelor întregi.

Gazeta Matematică

Soluția 1. Pentru existența radicalilor este necesar ca $0 \leq x \leq 2012$ 2p

În acest caz, pentru $x \neq 1006$ ecuația devine

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{1006}}{x - 1006} + \frac{\sqrt{2012 - x} - \sqrt{1006}}{1006 - x} = \frac{2(\sqrt{x} - \sqrt{2012 - x})}{2x - 2012}$$

egalitate adevărată pentru orice $x \neq 1006$. Ca urmare, numerele întregi 0, 1, 2, ..., 1005, 1007, 1008, ..., 2012 sunt soluții ale ecuației. 4p

Întrucât și $x = 1006$ verifică egalitatea din enunț, rezultă că ecuația are 2013 soluții întregi, și anume 0, 1, 2, ..., 2012. 1p

Soluția 2. Pentru existența radicalilor este necesar ca $0 \leq x \leq 2012$ 2p

Notăm $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{1006}$ și $c = \sqrt{2012 - x}$. Atunci $a^2 + c^2 = 2b^2$. Egalitatea din enunț devine

$$\frac{1}{a + b} + \frac{1}{c + b} = \frac{2}{a + c},$$

egalitate echivalentă cu $(a + c)(b + c) + (a + b)(a + c) = 2(a + b)(b + c) \Leftrightarrow a^2 + c^2 = 2b^2$ 4p

Deci ecuația are 2013 soluții întregi, și anume 0, 1, 2, ..., 2012. 1p

Problema 2. Determinați perechile de numere reale (a, b) pentru care egalitatea

$$|ax + by| + |bx + ay| = 2|x| + 2|y|$$

este adevărată pentru orice numere reale x și y .

Soluție. Pentru $x = y = 1$ rezultă că $|a + b| = 2$, deci $a + b \in \{-2; 2\}$ (1)

Pentru $x = 1, y = -1$ rezultă că $|a - b| = 2$, deci $a - b \in \{-2; 2\}$ (2) 3p

Din aceste relații se obține că $(a, b) \in \{(2, 0); (0, 2); (-2, 0); (0, -2)\}$ 2p

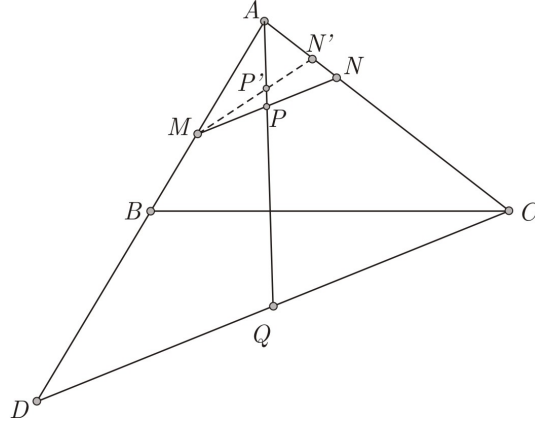
În fiecare din aceste cazuri se verifică faptul că egalitatea din enunț este adevărată pentru orice numere reale x și y 2p

Notă. Se acordă 2 puncte pentru obținerea uneia dintre relațiile (1) și (2)

Problema 3. Pe laturile (AB) și (AC) ale triunghiului ABC se consideră punctele M și respectiv N astfel încât $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ANM$. Punctul D este simetricul punctului A față de B , iar P și Q sunt mijloacele segmentelor $[MN]$ și respectiv $[CD]$.

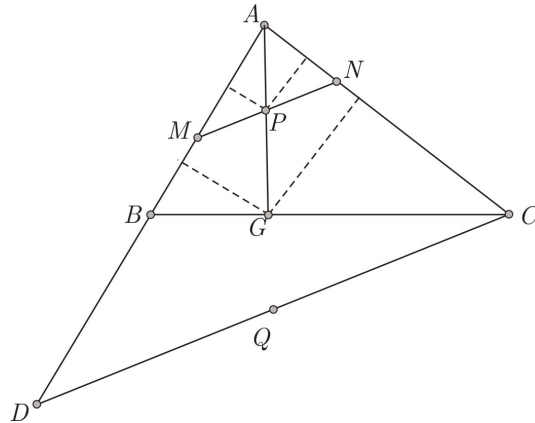
Demonstrați că punctele A, P și Q sunt coliniare dacă și numai dacă $AC = AB\sqrt{2}$.

Soluția 1.



„ \Leftarrow ” Triunghiurile AMN și ACB sunt asemenea, deci $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB}$, rezultă că $\frac{AM}{AN} = \sqrt{2}$... **1p**
 Cum $\frac{AD}{AC} = \frac{2AB}{AC} = \sqrt{2}$, rezultă că $\frac{AM}{AN} = \frac{AD}{AC} \Leftrightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{AN}{AC}$ **1p**
 Ca urmare, $MN \parallel CD$, de unde rezultă că A , P și Q sunt coliniare. **1p**
 „ \Rightarrow ” Vom arăta că $MN \parallel CD$. Presupunând contrariul, fie $N' \in (AC)$, $N' \neq N$ astfel încât $MN' \parallel CD$ și $\{P'\} = MN' \cap AQ$. Atunci P' este mijlocul lui $[MN']$, deci $[PP']$ este linie mijlocie în triunghiul MNN' . Rezultă că $PP' \parallel NN'$, absurd, deoarece $PP' \cap NN' = \{A\}$ **2p**
 Din $MN \parallel CD$ rezultă că $\frac{AM}{AD} = \frac{AN}{AC} \Leftrightarrow \frac{AM}{AN} = \frac{2AB}{AC}$.
 Dar $\triangle AMN \sim \triangle ACB$, rezultă că $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB} \Rightarrow \frac{AM}{AN} = \frac{AC}{AB}$.
 Rezultă că $\frac{2AB}{AC} = \frac{AC}{AB}$, de unde $AC = AB\sqrt{2}$ **2p**

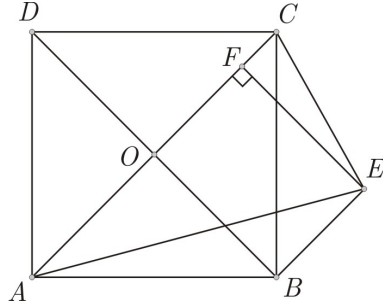
Soluția 2.



Fie $G = AP \cap BC$. Deoarece $\triangle AMN \sim \triangle ACB$, rezultă $\frac{AN}{AM} = \frac{AB}{AC}$.
 Deoarece P este mijlocul segmentului $[MN]$, rezultă că $\mathcal{A}_{AMP} = \mathcal{A}_{ANP}$, de unde $\frac{d(P,AB)}{d(P,AC)} = \frac{AN}{AM} = \frac{AB}{AC}$ **2p**
 Pe de altă parte $\frac{AP}{AG} = \frac{d(P,AB)}{d(G,AB)} = \frac{d(P,AC)}{d(G,AC)}$, deci $\frac{d(G,AB)}{d(G,AC)} = \frac{d(P,AB)}{d(P,AC)} = \frac{AB}{AC}$. De aici $\frac{BG}{CG} = \frac{\mathcal{A}_{ABG}}{\mathcal{A}_{AGC}} = \frac{AB^2}{AC^2}$ **3p**
 $AC = AB\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{BG}{CG} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow G$ este centrul de greutate al triunghiului $ACD \Leftrightarrow A$, P și Q sunt coliniare. **2p**

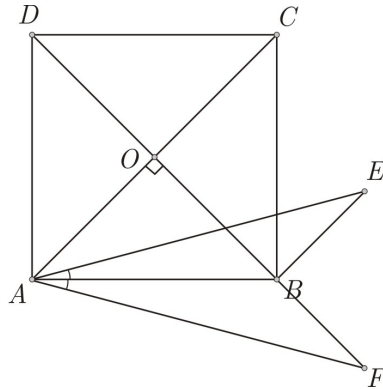
Problema 4. Se consideră pătratul $ABCD$ și punctul E în interiorul unghiului $\sphericalangle CAB$, astfel încât măsura unghiului $\sphericalangle BAE$ este de 15° , iar dreptele BE și BD sunt perpendiculare. Demonstrați că $AE = BD$.

Soluția 1.



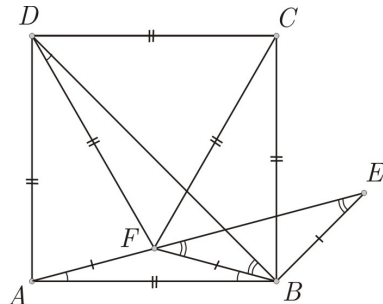
Cum unghiurile $\sphericalangle ACB$ și $\sphericalangle CBE$ au măsurile de 45° , rezultă că dreptele AC și BE sunt paralele. **1p**
 Fie F proiecția lui E pe AC . Atunci $EF = BO = \frac{BD}{2}$ **2p**
 Triunghiul FAE este dreptunghic în F și are unghiul $\sphericalangle FAE$ de 30° .
 Deducem că $AE = 2EF = BD$ **4p**

Soluția 2.



Fie $F \in DB$ astfel încât (AB este bisectoarea unghiului $\sphericalangle FAE$).
 Atunci $\triangle FAB \equiv \triangle EAB$ (U.L.U.), de unde $[AE] \equiv [AF]$ **3p**
 Triunghiul dreptunghic OAF are unghiul $\sphericalangle AFO$ de 30° . Rezultă că $AF = 2AO = AC$. Ca urmare $BD = AC = AF = AE$ **4p**

Soluția 3.



Fie F în interiorul pătratului astfel încât triunghiul CFD este echilateral. În triunghiul isoscel DAF unghiul $\sphericalangle ADF$ este de 30° , deci $m(\sphericalangle FAB) = 15^\circ$, ca urmare $F \in AE$.
 **3p**
 Analog $m(\sphericalangle ABF) = 15^\circ$. Iar $m(\sphericalangle BFE) = 30^\circ$, pe de altă parte $m(\sphericalangle AEB) = 180^\circ - 15^\circ - 135^\circ = 30^\circ$, deci $BE = BF$ **2p**
 $m(\sphericalangle DBF) = 30^\circ$, deci $m(\sphericalangle DBF) = 135^\circ = m(\sphericalangle ABE)$, $EB = FB$ și $AB = DF$, deci $\triangle BFD \equiv \triangle EBA$. Ca urmare $AE = BD$ **2p**