Olimpiada naţională de matematică, 2013 — etapa judeţeană şi a municipiului Bucureşti

CLASA a XII-a – soluţii şi barem orientativ

Problema 1. Să se calculeze limita $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \mathrm{e}^{x^n}\mathrm{d}x$.

Soluţie. Întrucât $e^{x^n} \geq 1$, oricare ar fi $x \in [0,1]$, rezultă că $\int_0^1 e^{x^n}\mathrm{d}x \geq 1$. .... **2 puncte**
Pe de altă parte, $e^t \leq 1+3t$, oricare ar fi $t \in [0,1]$, ... **2 puncte**
deci $\int_0^1 e^{x^n}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 (1+3x^n)\,\mathrm{d}x = 1+3/(n+1)$. .... **2 puncte**
Prin urmare, limita cerută este egală cu 1. .... **1 punct**

Problema 2. Un grup $(G,\cdot)$ are proprietatea (P), dacă, pentru orice automorfism f al lui G, există două automorfisme g şi h ale lui G, astfel încât $f(x) = g(x)\cdot h(x)$, oricare ar fi $x \in G$. Să se arate că:

(a) Orice grup care are proprietatea (P) este comutativ.
(b) Orice grup comutativ finit de ordin impar are proprietatea (P).
(c) Niciun grup finit de ordin $4n+2$, $n \in \mathbb{N}$, nu are proprietatea (P).

(Ordinul unui grup finit este numărul de elemente ale acelui grup.)

Soluţie. **(a)** Fie $g,h \in \mathrm{Aut}(G)$, astfel incât $x = g(x)h(x)$, oricare ar fi $x \in G$. Fie a şi b două elemente ale lui G. Atunci $a = g(a)h(a)$, $b = g(b)h(b)$ şi $ab = g(ab)h(ab)$. .... **1 punct**
Rezultă că $g(a)h(a)g(b)h(b) = ab = g(ab)h(ab) = g(a)g(b)h(a)h(b)$, deci $h(a)g(b) = g(b)h(a)$. .... **1 punct**
Concluzia rezultă din surjectivitatea lui g si h. .... **1 punct**

(b) Fie $f \in \mathrm{Aut}(G)$. Cum G este comutativ şi are ordinul impar, functiile $\phi,\psi\colon G \to G$, $\phi(x) = x^2$, $\psi(x) = x^{-1}$, sunt automorfisme, deci $g = f\circ\phi$ şi $h = f\circ\psi$ sunt automorfisme. .... **1 punct**
În fine, $f(x) = f(x^2x^{-1}) = f(x^2)f(x^{-1}) = g(x)h(x)$, oricare ar fi $x \in G$, de unde rezultă concluzia. .... **1 punct**

(c) Presupunem că G are proprietatea (P) şi fie $a \in G$ un element de ordin 2. Vom arăta că a este unicul element de ordin 2 din G. Fie $b \in G$ de ordin 2, $b \neq a$. Cum G este comutativ (cf. **(a)**), mulţimea $\{e,a,b,ab\}$ este subgrup al lui G, deci $4 \mid 4n+2$ — contradicţie. Fie $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$. Cum $e = \varphi(e) = \varphi(a^2) = \varphi^2(a)$ şi $\varphi(a) \neq e$, rezultă că $\varphi(a) = a$. ...... **1 punct**
Fie $g,h \in \mathrm{Aut}(G)$, astfel încât $x = g(x)h(x)$, oricare ar fi $x \in G$. Atunci $a = g(a)h(a) = a^2$, de unde, $a = e$ — contradicţie. .... **1 punct**

Remarcă. Există grupuri de ordin $4n$, care au proprietatea (P) — e.g., grupul lui Klein — şi grupuri de ordin $4n$, care nu o au — e.g., grupul aditiv $\mathbb{Z}_4$.

Problema 3. Fie $f\colon [0,\pi/2] \to [0,\infty)$ o funcţie crescătoare. Să se arate că:

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \big(f(x) - f(\pi/4)\big)(\sin x - \cos x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$

(b) Există $a \in [\pi/4, \pi/2]$, astfel încât $\displaystyle\int_0^a f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\cos x\,\mathrm{d}x.$

Soluţie. (a) Scriem integrala sub forma:

$$\int_0^{\pi/2} \big(f(x) - f(\pi/4)\big)(\sin x - \cos x)\,\mathrm{d}x =$$
$$\underbrace{\int_0^{\pi/4} \big(f(x) - f(\pi/4)\big)(\sin x - \cos x)\,\mathrm{d}x}_{I} +$$
$$\underbrace{\int_{\pi/4}^{\pi/2} \big(f(x) - f(\pi/4)\big)(\sin x - \cos x)\,\mathrm{d}x}_{J} = I + J.$$

.... **3 puncte**

Dacă $x \in [0, \pi/4]$, atunci $f(x) - f(\pi/4) \leq 0$ şi $\sin x - \cos x \leq 0$, deci $I \geq 0$ iar dacă $x \in [\pi/4, \pi/2]$, atunci $f(x) - f(\pi/4) \geq 0$ şi $\sin x - \cos x \geq 0$, deci $J \geq 0$. .... **1 punct**

Prin urmare, $I + J \geq 0$. .... **1 punct**

(b) Fie $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)(\sin x - \cos x)\,\mathrm{d}x$, $0 \leq t \leq \pi/2$. Atunci $F(\pi/4) = \displaystyle\int_0^{\pi/4} f(x)(\sin x - \cos x)\,\mathrm{d}x \leq 0$ şi $F(\pi/2) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)(\sin x - \cos x)\,\mathrm{d}x \geq \displaystyle\int_0^{\pi/2} f(\pi/4)(\sin x - \cos x)\,\mathrm{d}x = 0,$

ultima inegalitate rezultând de la punctul **(a)**. Concluzia rezultă din continuitatea lui F. .... **2 puncte**

Problema 4. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu proprietatea că $x = 0$ este unica soluţie a ecuaţiei $x^2 = 0$, $x \in A$. Fie $B = \{a \in A \mid a^2 = 1\}$. Să se arate că:

(a) $ab - ba = bab - a$, oricare ar fi $a \in A$ şi $b \in B$.

(b) $(B, \cdot)$ este grup.

Soluţie. (a) Fie $a \in A$ şi $b \in B$. Întrucât

$$\big((b-1)a(b+1)\big)^2 = (b-1)a(b+1)(b-1)a(b+1) = (b-1)a(b^2-1)a(b+1) = 0,$$

rezultă că $(b-1)a(b+1) = 0$, ... **1 punct**

deci $ab - ba = bab - a$. .... **1 punct**

(b) Fie a şi b două elemente ale lui B. Întrucât

$$\begin{aligned}(ab - ba)^2 &= abab - ab^2a - ba^2b + baba = a(bab) + (bab)a - 2\\ &= a(ab - ba + a) + (ab - ba + a)a - 2 \qquad \text{(cf. (a))}\\ &= a^2b - aba + a^2 + aba - ba^2 + a^2 - 2 = 0,\end{aligned}$$

rezultă că $(ab - ba)^2 = 0$, deci $ab = ba$. .... **4 puncte**
Prin urmare, $(ab)^2 = a^2b^2 = 1$, i.e., $ab \in B$; în plus, $a^{-1} = a$. Rezultă că B este subgrup al lui $U(A)$. .... **1 punct**