Olimpiada de matematică, etapa judeţeană şi a municipiului Bucureşti,
12 Martie2011
Barem de corectare, clasa a X-a

Problema 1. Fie a, b, c numere reale strict pozitive. Arătaţi că ecuaţia $a^x + b^x = c^x$ are cel mult o soluţie.

Gazeta Matematică

Soluţie. Ecuaţia se reduce la $f(x) := \left(\frac{a}{c}\right)^x + \left(\frac{b}{c}\right)^x = 1$. **2p**

Dacă una dintre fracţiile precedente este ≥ 1 şi cealaltă este ≤ 1, atunci ecuaţia nu are nici soluţii pozitive, nici soluţii negative. **2p**

Dacă $a > c$ şi $b > c$, sau dacă $a < c$ şi $b < c$, atunci funcţia f este strict monotonă, deci ecuaţia $f(x) = 1$ are cel mult o soluţie. **3p**

Problema 2. a) Arătaţi că, dacă z_1, z_2, z_3, z_4 sunt numere complexe distincte, cu modulele egale şi cu suma nulă, atunci patrulaterul cu vârfurile de afixe z_1, z_2, z_3, z_4 este dreptunghi.

b) Arătaţi că, dacă numerele reale x, y, z, t îndeplinesc relaţiile $\sin x + \sin y + \sin z + \sin t = 0$ şi $\cos x + \cos y + \cos z + \cos t = 0$, atunci pentru orice număr întreg n,

$$\sin(2n+1)x + \sin(2n+1)y + \sin(2n+1)z + \sin(2n+1)t = 0.$$

Soluţie. a) Din ipoteză, $\sum \bar{z}_1 = 0$ şi numerele nu sunt nule, deci $\sum \frac{1}{z_1} = 0 \quad (1)$. **2p**

Dacă $z_1 + z_2 \neq 0$, ipoteza şi relaţia (1) duc la $z_1 + z_2 = -z_3 + z_4$ şi $z_1 z_2 = z_3 z_4$, ceea ce implică $\{z_1, z_2\} = \{-z_3, -z_4\}$, iar dacă $z_1 + z_2 = 0$, atunci $z_3 + z_4 = 0$; în ambele cazuri, numerele z_1, z_2, z_3, z_4 sunt două câte două opuse, de unde concluzia. **2p**

b) Dacă $z_1 = \cos x + i \sin x$ şi analoagele, atunci $\sum z_1 = 0$. **1p**

De asemenea, $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1$. **1p**

Din a), z_1, z_2, z_3, z_4 sunt opuse două câte două, de unde reiese imediat cerinţa. **1p**

Problema 3. Fie a, b două numere complexe. Arătaţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

A$_1$) Modulele rădăcinilor complexe ale ecuaţiei $x^2 - ax + b = 0$ sunt respectiv egale cu modulele rădăcinilor ecuaţiei $x^2 - bx + a = 0$.

A$_2$) $a^3 = b^3$ sau $b = \bar{a}$.

Soluţie. Dacă $|x_1| = |x_3|, |x_2| = |x_4|$ (1), atunci $|a| = |x_3 x_4| = |x_1 x_2| = |b|$. **1p**

Deducem $|x_1 + x_2| = |x_3 + x_4|$ (2). Din (1) şi (2) reiese că există $k \in \mathbb{C}$ astfel încât $x_2 = kx_1$, $x_4 = kx_3$ sau există $k \in \mathbb{C}$ astfel încât $x_2 = kx_1, x_4 = \overline{k}x_3$. **2p**

În primul caz avem $a = kx_3^2 = (1+k)x_1$ şi $b = kx_1^2 = (1+k)x_3$, ceea ce implică $a^3 = k(1+k)^2 x_1^2 x_3^2 = b^3$. **1p**

În al doilea caz avem $a = \overline{k}x_3^2 = (1+k)x_1$ şi $b = kx_1^2 = (1+\overline{k})x_3$, de unde $x_1^2 \overline{x}_1 = x_3 \overline{x}_3^2$, deci $x_1 = \overline{x}_3$ sau $a = b = 0$, apoi $x_2 = \overline{x}_4$, deci $a = \overline{b}$. **1p**

Reciproc, dacă $b = \overline{a}$, atunci $x_1 + x_2 = \overline{x}_3 + \overline{x}_4$, $x_1 x_2 = \overline{x}_3 \overline{x}_4$, ceea ce arată că $\{x_1, x_2\} = \{\overline{x}_3, \overline{x}_4\}$, iar dacă $a^3 = b^3$, atunci $a = \varepsilon b$, $\varepsilon^3 = 1$ şi rădăcinile verifică relaţiile $x_1 + x_2 = \varepsilon(x_3 + x_4)$, $x_1 x_2 = \varepsilon^2 x_3 x_4$; în ambele cazuri, $\{|x_1|, |x_2|\} = \{\,|x_3|, |x_4|\}$. **2p**

Problema 4. a) Arătaţi că, dacă $a, b > 1$ sunt numere reale distincte, atunci

$$\log_a(\log_a b) > \log_b(\log_a b).$$

b) Arătaţi că, dacă $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$ şi $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > 1$ sunt numere reale, atunci

$$\log_{a_1}(\log_{a_1} a_2) + \log_{a_2}(\log_{a_2} a_3) + \ldots + \log_{a_{n-1}}(\log_{a_{n-1}} a_n) + \log_{a_n}(\log_{a_n} a_1) > 0.$$

Soluţie. a) Dacă $a < b$ atunci $\log_a(\log_a b) = (\log_a b)(\log_b(\log_a b)) > \log_b(\log_a b)$ pentru că $\log_b(\log_a b) > 0$ şi $\log_a b > 1$. **2p**

Dacă $a > b$, atunci concluzia reiese din $\log_b(\log_a b) < 0$ şi $\log_a b < 1$. **2p**

b) Raţionăm inductiv. Pentru $n = 2$,
$\log_{a_1}(\log_{a_1} a_2) + \log_{a_2}(\log_{a_2} a_1) > \log_{a_2}(\log_{a_1} a_2) + \log_{a_2}(\log_{a_2} a_1) = \log_{a_2} 1 = 0.$ **1p**
Pentru pasul de inducţie: dacă $a_1 > a_2 > \ldots > a_{n+1} > 1$, atunci

$$\log_{a_1}(\log_{a_1} a_2) + \log_{a_2}(\log_{a_2} a_3) + \ldots + \log_{a_n}(\log_{a_n} a_{n+1}) + \log_{a_{n+1}}(\log_{a_{n+1}} a_1) =$$
$$= \log_{a_1}(\log_{a_1} a_2) + \ldots + \log_{a_{n-1}}(\log_{a_{n-1}} a_n) + \log_{a_n}(\log_{a_n} a_1) + \log_{a_n}(\log_{a_n} a_{n+1}) +$$
$$+ \log_{a_{n+1}}(\log_{a_{n+1}} a_1) - \log_{a_n}(\log_{a_n} a_1) >$$
$$> \log_{a_{n+1}}(\log_{a_n} a_{n+1}) + \log_{a_{n+1}}(\log_{a_{n+1}} a_1) - \log_{a_n}(\log_{a_n} a_1) =$$
$$= \log_{a_{n+1}}(\log_{a_n} a_1) - \log_{a_n}(\log_{a_n} a_1) > 0,$$

deoarece $\log_{a_n} a_1 > 0$ şi $a_{n+1} < a_n$. **2p**