Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 12 Martie 2011

CLASA a VIII-a

Problema 1. a) Demonstraţi că $3a^2 - 2a + 3 \geq \frac{8}{3}$, pentru orice număr real a.

b) Determinaţi numerele reale x şi y cu proprietatea că

$$(x^2 - x + 1)(3y^2 - 2y + 3) - 2 = 0.$$

Soluţie. a) Inegalitatea se scrie $3a^2 - 2a + \frac{1}{3} \geq 0 \Longleftrightarrow 9a^2 - 6a + 1 \geq 0$
.... **1 punct**
echivalent cu $(3a - 1)^2 \geq 0$, ceea ce este adevărat.
.... **2 puncte**
b) Avem $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$.
.... **1 punct**
Conform punctului anterior, $3y^2 - 2y + 3 \geq \frac{8}{3}$.
Rezultă că $(x^2 - x + 1)(3y^2 - 2y + 3) \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{3} = 2$, oricare ar fi numerele reale x, y.
.... **1 punct**
Egalitatea se obţine pentru $(3y - 1)^2 = 0$ şi $(x - \frac{1}{2})^2 = 0$
.... **1 punct**
de unde $x = \dfrac{1}{2}$ şi $y = \dfrac{1}{3}$.
.... **1 punct**

Problema 2. a) Arătaţi că numărul $m^2 - m + 1$ aparţine mulţimii $\{n^2 + n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$, oricare ar fi m număr natural nenul.

b) Fie p un pătrat perfect, $p > 1$. Demonstraţi că există numerele naturale nenule r şi q astfel încât $p^2 + p + 1 = (r^2 + r + 1)(q^2 + q + 1)$.

Soluţie.
a) Avem $m^2 - m + 1 = (m - 1)^2 + (m - 1) + 1$
.... **2 puncte**
Cum $m-1 \geq 0$, rezultă $m-1 \in \mathbb{N}$, deci $m^2-m+1 \in \{n^2+n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$.
.... **1 punct**
b) Fie k număr natural astfel încât $p = k^2$. Avem $k \geq 2$, deoarece $p > 1$
.... **1 punct**
Cum $p^2 + p + 1 = k^4 + k^2 + 1 = (k^2 + 1)^2 - k^2$
.... **1 punct**
rezultă că $p^2 + p + 1 = (k^2 - k + 1)(k^2 + k + 1)$
.... **1 punct**
Alegem $r = k$ şi $q = k - 1$. Cum ambele sunt numere naturale nenule, cerinţa este demonstrată.
.... **1 punct**

Problema 3. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară dreaptă cu bazele triunghiuri echilaterale. Un plan α ce conţine punctul A intersectează semidreptele $(BB'$ şi $(CC'$ în punctele E şi F astfel încât $\text{aria}\,\Delta ABE + \text{aria}\,\Delta ACF = \text{aria}\,\Delta AEF$. Determinaţi măsura unghiului format de planul (AEF) cu planul (BCC').

Soluţie. Fie M mijlocul segmentului BC.
Triunghiul MEF este proiecţia triunghiului AEF pe planul (BCC').
.... **1 punct**
Notăm cu u măsura unghiului format de planele (AEF) şi (BCC').
Avem $\cos u = \dfrac{[MEF]}{[AEF]} =$
.... **1 punct**
$= \dfrac{[BCFE]}{2[AEF]} = \dfrac{[BCFE]}{2([ABE]+[ACF])} =$
.... **2 puncte**
$= \dfrac{[BCFE]}{4([MBE]+[MCF])} = \dfrac{[BCFE]}{2[BCFE]} = \dfrac{1}{2}.$
.... **2 puncte**
Rezultă că $u = 60°$.
.... **1 punct**

Problema 4. Determinaţi numerele naturale m pentru care

$$\{\sqrt{m}\} = \{\sqrt{m+2011}\}.$$

Notă. $\{x\}$ este partea fracţionară a numărului real x.

Soluţie.
Ecuaţia se scrie $\sqrt{m} - [\sqrt{m}] = \sqrt{m+2011} - [\sqrt{m+2011}]$, adică

$$\sqrt{m+2011} - \sqrt{m} = [\sqrt{m+2011}] - [\sqrt{m}] = p \in \mathbb{N}.$$

.... **2 puncte**
Din $\sqrt{m+2011} = p + \sqrt{m}$, rezultă prin ridicare la pătrat $2011 = p^2 + 2p\sqrt{m} \in \mathbb{N}$, deci $m = k^2, k \in \mathbb{N}^*$ .... **2 puncte**
Prin urmare $2011 = p(p+2k)$ şi cum 2011 este număr prim, obţinem $p = 1$ şi $p + 2k = 2011$ .... **2 puncte**
Rezultă $k = 1005$ şi $m = 1005^2$ .... **1 punct**