



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ – 08.02.2025

Clasa a XII-a

Secțiunea H1

Filiera tehnologică - toate profilurile și specializările

PROBLEMA 1

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} 2xe^{x^2} + e^x + 3, & x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 4, & x < 0 \end{cases}$

- Arătați că f admite primitive pe \mathbb{R}
- Pentru $x \in [0; \infty)$, calculați o primitivă a funcției $f(x)$, dacă $F(1) = 2e$.

PROBLEMA 2

Calculați

a) $\int_{-2}^2 x^{2025} \sqrt{x^2 - 2x + 1} dx$

b) $\int_{-2025}^{2025} \sqrt[3]{x^3 + x} dx$

PROBLEMA 3

Se consideră mulțimea $G = (2; \infty)$, pe care se definește $a \Delta b = ab - 2a - 2b + 6$, cu $a, b \in G$.

- Arătați că pentru orice $a, b \in G$ avem $a \Delta b \in G$.
- Arătați că (G, Δ) este grup abelian.
- Determinați numerele reale $x, y \in G$ astfel încât $\lg x \Delta \lg y = \lg x$
- Demonstrați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow (2; \infty)$, $f(x) = 2025^x + 2$ este un izomorfism între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și (G, Δ) .
- Determinați $m, n \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ astfel încât $m \Delta n \in \mathbb{N}$

PROBLEMA 4

- Pe mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ se definește legea de compoziție $x \circ y = \min(x, y)$, pentru orice $x, y \in M$. Alcătuiți tabla operației „ \circ ”, și stabiliți dacă M este parte stabilă în raport cu „ \circ ”.
- Pe mulțimea \mathbb{Z}_6 se definește operația algebrică $x * y = 3x + 5y + 4$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Z}_6$

Alcătuiți tabla operației „ $*$ ” și stabiliți dacă operația dată este asociativă.