

BAREM

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ – 08.02.2025

Clasa a X-a

Secțiunea H2

Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

1. Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $(z + i)^{100} + (z - i)^{100} = 0$ a) Demonstrați că $|z + i| = |z - i|$ b) Demonstrați că z este un număr real.**Barem**

$$a) (z + i)^{100} + (z - i)^{100} = 0 \Rightarrow (z + i)^{100} = -(z - i)^{100} \Rightarrow |(z + i)^{100}| = |-(z - i)^{100}|$$

$$\text{Deci } |z + i| = |z - i| \text{ (3p)}$$

b) Dacă $|z + i| = |z - i| \Rightarrow \sqrt{a^2 + (b + 1)^2} = \sqrt{a^2 + (b - 1)^2}$. Se obține $b = 0$ deci z este un număr real. (4p)

$$2. a) \text{Arătați că } \sqrt{2n - \sqrt{4n^2 - 1}} = \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}}$$

b) Fie $S_n = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}}}$. Găsiți cel mai mare număr natural n pentru care $S_n < \sqrt{2}$.**Barem**

a) Prin ridicare la pătrat se verifică relația dată (3p)

b) Din punctul a) $S_n = \frac{\sqrt{2n+1}-1}{\sqrt{2}} \sqrt{2n+1} < 3 \Rightarrow 2n+1 < 9 \Rightarrow n < 4$. Deci $n=3$ (2p)3. Demonstrați că $\log_{xyz} t + \log_{yzt} x + \log_{ztx} y + \log_{txy} z \geq \frac{4}{3}$, $\forall x, y, z, t \in (1, \infty)$ **Barem**Demonstrăm că $\log_a b + \log_b a \geq 2$. (2p)Analog $\log_a c + \log_c a \geq 2, \log_a d + \log_d a \geq 2, \log_c b + \log_b c \geq 2, \log_d b + \log_b d \geq 2$ și $\log_c d + \log_d c \geq 2$.Însumate obținem $\log_a bcd + \log_b cda + \log_c abd + \log_d abc \geq 12$ (2p)Notăm $a=xyz, b=yzt, c=txz, d=txy$ și se înlocuiește în relația de mai sus. Astfel se obține

$$\log_{xyz} t + \log_{yzt} x + \log_{ztx} y + \log_{txy} z \geq \frac{4}{3}, \forall x, y, z, t \in (1, \infty) \textbf{(3p)}$$

4. Determinați valorile reale ale lui m pentru care funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} -x^2 + mx + 1, & x \leq 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$

este: a) injectivă b) surjectivă c) bijectivă.

Barem

a) $x_v = \frac{m}{2} \geq 0 \Leftrightarrow m \in [0, \infty) \textbf{(3p)}$

b) $m \in \mathbf{R} \textbf{(3p)}$

c) $m \in [0, \infty) \textbf{(1p)}$