CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ – 08.02.2025

Clasa a IX-a

Secțiunea H1
Filiera tehnologică - toate profilurile și specializările

PROBLEMA 1

a) Determinați cardinalul mulțimii A={ a$\in Z$ | 4+ $\sqrt{a^2-2a+1} < 2025$ }.

b) Dacă b<0, arătați că expresia $\sqrt{4b^2-4b+1} - 3\sqrt{9-6b+b^2} + \sqrt{b^2}$ este constantă.

PROBLEMA 2

Într-o grădină se plantează 2025 de flori pe rânduri astfel: pe primul rând se plantează o floare, pe al doilea rând 3 flori , pe al treilea rând 5 flori, și tot așa, respectându-se regula până se plantează toate florile.

a) Câte flori se plantează pe rândul 25?
b) Determinați numărul rândului pe care se plantează 77 de flori.
c) Determinați câte rânduri au fost plantate cu flori.
d) Este posibil ca pe un rând să fie plantate 91 de flori? Justificați.

PROBLEMA 3

Fie triunghiul dreptunghic isoscel MAT cu lungimea catetei de 5 cm

a) Construiți punctul E și R astfel încât $\overrightarrow{ME}=-\overrightarrow{TA}$, $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{RT}$,
b) Calculați $|\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{EM}|$ și $|\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{TM}|$
c) Arătați că punctele M,A,R sunt coliniare.
d) Arătați că pentru orice punct F din interiorul patrulaterului convex MATE are loc relația $\overrightarrow{FA}-\overrightarrow{FT}=\overrightarrow{FM}-\overrightarrow{FE}$

PROBLEMA 4

Se consideră șirul $(a_n), n \in \mathbf{N}$ cu termenul general $a_n=\frac{2^{2025}}{2^{n+2025}}$

a) Arătați că $a_n=\frac{1}{2^n}$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.
b) Arătați că șirul $(a_n), n \in N$, este o progresie geometrică.

Arătați că suma $a_0+a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{2025} \in (1;2)$.

Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
Toate problemele sunt obligatorii;
Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ – 08.02.2025

Clasa a X-a

Secțiunea H1
Filiera tehnologică - toate profilurile și specializările

PROBLEMA 1

a) Să se arate că numărul A=$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} \in \boldsymbol{N}$.
b) Calculați $9^{2\log_3 2+4\log_{81} 2}+\sqrt{3^{2+0.5\log_3 16}}$.

PROBLEMA 2

Să se arate că $\forall z \in \boldsymbol{C}$, avem: $\left|z+\frac{1}{2}\right|^2+i\left|z+\frac{i}{2}\right|^2+(1+i)|z|^2-\frac{1}{4}(1+i)=z$.

PROBLEMA 3

Se consideră expresia $E(x)=\log_2\left(\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{\log_{2x} 2}+\log_4 x^4-2\log_2\sqrt{2}$.

a) Să se determine $x \in \boldsymbol{R}$ pentru care este definită expresia.
b) Să se arate că $E(x)=\log_2 x$.
c) Să se verifice dacă $E(x+1)-E(x)>0$, oricare ar fi numărul real x pentru care este definită expresia.

PROBLEMA 4

Se consideră funcția $f: \boldsymbol{R} \rightarrow (0,+\infty)$ cu proprietatea că $f(\log_3 x-1)=\frac{x}{3}$, $\forall x \in (0,+\infty)$.

a) Calculați S= $f(1)+f(2)+....+f(2025)$.
b) Determinați funcția f.

Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
Toate problemele sunt obligatorii;
Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ – 08.02.2025

Clasa a XI-a

Secțiunea H1
Filiera tehnologică - toate profilurile și specializările

PROBLEMA 1

Fie matricea A(x)=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{x} \\ 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $x \epsilon \mathbb{R}$.

a) Determinați valoarea numarului real x astfel încat det(A(x))=1
b) Demonstrați că: det(A(x)$\cdot A(1) - A(x+1)) > 0, oricare\ ar\ fi\ x > 0$
c) Arataţi că determinantul matricei B(n)=A(1^2)+A(2^2)+…+A(n^2) este diferit de zero oricare ar fi n numar natural mai mare sau egal cu 2.

PROBLEMA 2

Fie A(1,1), B(-1, -2), C(p,q) trei puncte în plan.

a) Daca C aparține dreptei de ecuație x+y-3=0 să se determine valorile lui p și q numere naturale astfel încat aria triunghiului ABC sa fie minimă și să se determine valoarea ariei în acest caz.
b) Calculați distanța de la C la AB daca C(1, 2)

PROBLEMA 3

Se consideră funcția : $D \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-3x}}$, unde D este domeniul maxim de definiție al funcției.

a) Determinați D;
b) Calculați $\lim_{x \nearrow 0} f(x)$;
c) Determinați ecuațiile tuturor asimptotelor funcției.

PROBLEMA 4

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x)}{x}, & x < 0 \\ a, & x = 0 \\ b \cdot \left(\frac{2x+1}{3x+1}\right)^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care funcția este continuă.

Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
Toate problemele sunt obligatorii;
Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ – 08.02.2025

Clasa a XII-a

Secțiunea H1
Filiera tehnologică - toate profilurile și specializările

PROBLEMA 1

Fie funcția f: R→ R f(x)=$\begin{cases} 2xe^{x^2} + e^x + 3, & x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 4, & x < 0 \end{cases}$

a) Arătați că f admite primitive pe R
b) Pentru x∈[0; ∞), calculați o primitivă a funcției f(x), dacă F(1)=2e.

PROBLEMA 2

Calculați

a) $\int_{-2}^{2} x^{2025} \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ dx

b) $\int_{-2025}^{2025} \sqrt[3]{x^3 + x}$ dx

PROBLEMA 3

Se consideră mulțimea G= (2;∞), pe care se definește aΔb= ab-2a-2b+6, cu a, b∈ G.

a) Arătați că pentru orice a,b∈ G avem aΔb∈ G.
b) Arătați că (G, Δ) este grup abelian.
c) Determinați numerele reale x, y∈ G astfel încât lgx Δ lgy= lgx
d) Demonstrați că funcția f: R→ $(2;\infty), f(x) = 2025^x$+ 2 este un izomorfism între grupurile (R,+) și (G,Δ).
e) Determinați m,n ∈ $Q \setminus Z$ $astfel$ încât mΔn∈ N

PROBLEMA 4

a) Pe mulțimea M={0,1,2,3,4} se definește legea de compoziție x○y=min(x,y), pentru orice x,y∈ M. Alcătuiți tabla operației „○”, și stabiliți dacă M este parte stabilă în raport cu „○”.
b) Pe mulțimea Z_6 se definește operația algebrică x*y=$\hat{3}$x+$\hat{5}y + \hat{4}$, oricare ar fi x.y∈ Z_6

Alcătuiți tabla operației „*” și stabiliți dacă operația dată este asociativă.