BAREM

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ – 08.02.2025

Clasa a IX-a

Secțiunea H2
Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

1.a) Determinați două numere naturale $x \in \boldsymbol{N}^*$ și $\overline{abc}$ astfel încât numărul $\sqrt{(\overline{abc}+\overline{cab}+\overline{bca})x}$ să fie rational, iar x să fie cel mai mic număr posibil.

b)Calculați $1-\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{2009\cdot 2010}-\frac{2009}{2010}\right|$.

Barem

a) $(\overline{abc}+\overline{cab}+\overline{bca})x = 111(a+b+c)x = 3\cdot 37(a+b+c)x$ **(1p)**

De aici a+b+c=3. Cum a, b, c sunt nenule => $a=b=c=1$ **(1p)** și x=37. **(1p)**

b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{2009\cdot 2010}-\frac{2009}{2010}=\frac{2-1}{2}+\frac{3-2}{6}+\frac{4-3}{12}+\cdots+\frac{2010-2009}{2009\cdot 2010}-\frac{2009}{2010}=1-\frac{1}{2}++\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2009}-\frac{1}{2010}-\frac{2009}{2010}$=0 **(3p)**

Deci $1-\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{2009\cdot 2010}-\frac{2009}{2010}\right|=1$ **(1p)**

2.Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un șir pentru care $x_0=1$ iar $2x_{n+1}=x_n+2$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}$.

a) Arătați că șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ definit prin $b_n = x_n - x_{n-1}$, oricare ar fi n natural nenul, este o progresie geometrică.

b) Determinați formula termenului general al șirului $(x_n)_{n\geq 0}$.

Barem

a)$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}=\frac{\left(\frac{1}{2}x_n+1\right)-\left(\frac{1}{2}x_{n-1}+1\right)}{x_n-x_{n-1}}=\frac{1}{2}, \forall n \geq 1$. Deci șirul e progresie aritmetică. **(3p)**

b)Cum $b_1=\frac{1}{2} => b_n=\frac{1}{2^n}, \forall n \geq 1$. **(2p)**

Atunci $x_n=(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\cdots+(x_2--x_1)+x_1=b_n+b_{n-1}+b_{n-2}+\cdots+b_2+\frac{3}{2}=2-\frac{1}{2^n}$ **(2p)**

3.Calculați $\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\frac{1}{2025^2}\right]$, unde [x] reprezintă partea întreagă a numărului x.

Barem

Adresa: Str. Mihai Eminescu, Nr. 11, 410019, Oradea,
Tel./fax: +40 (0) 259 41 64 54, +40 (0) 259 47 02 22 Fax: +40 (0) 259 41 80 16,
Web: www.isjbihor.ro - E-mail: contact@isjbihor.ro

$\sum_{k=1}^{2025}\frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{2025}\frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{2025}\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 + 1 - \frac{1}{2025} < 2$ (1) **(5p)**

$\sum_{k=1}^{2025}\frac{1}{k^2}$>1(2) **(1p)**

Din cele două relații avem $\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \frac{1}{2025^2}\right] = 1$ **(1p)**

4. Dacă M este punctul de intersecție a dreptelor care unesc mijloacele laturilor opuse ale unui patrulater ABCD, arătați că pentru orice punct O din planul patrulaterului avem $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + +\overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OM}$.

Barem

Fie X, Y, Z, T mijloacele laturilor patrulaterului => XYZT este paralelogram **(2p)**, iar M este mijlocul diagonalelor XZ și TY. **(1p)**

$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OZ}, 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OT} => 4\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{OT}$ **(2p)**

$\overrightarrow{OX} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}, \overrightarrow{OY} = \frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}, \overrightarrow{OZ} = \frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{2}, \overrightarrow{OT} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}}{2}$

$Deci\ 4\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ **(2p).**

Adresa: Str. Mihai Eminescu, Nr. 11, 410019, Oradea,
Tel./fax: +40 (0) 259 41 64 54, +40 (0) 259 47 02 22 **Fax**: +40 (0) 259 41 80 16,
Web: www.isjbihor.ro - **E-mail**: contact@isjbihor.ro

BAREM

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA LOCALĂ – 08.02.2025

Clasa a X-a

Secțiunea H2
Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

1. Fie $z \in \boldsymbol{C}$astfel încât $(z+i)^{100}+(z-i)^{100}=0$

a)Demonstrați că $|z+i|=|z-i|$

b) Demonstrați că z este un număr real.

Barem

a)$(z+i)^{100}+(z-i)^{100}=0 => (z+i)^{100}=-(z-i)^{100} => |(z+i)^{100}|=|-(z-i)^{100}|$

Deci $|z+i|=|z-i|$**(3p)**

b)Dacă $|z+i|=|z-i| => \sqrt{a^2+(b+1)^2}=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$. Se obține b=0 deci z este un număr real.**(4p)**

2. a)Arătați că$\sqrt{2n-\sqrt{4n^2-1}}=\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}}$

b)Fie $S_n=\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}}}$. Găsiți cel mai mare număr natural n pentru care $S_n<\sqrt{2}$.

Barem

a)Prin ridicare la pătrat se verifică relația dată **(3p)**

b)Din punctul a) $S_n=\frac{\sqrt{2n+1}-1}{\sqrt{2}}$**(2p)** $\sqrt{2n+1}<3 => 2n+1<9 => n<4$. Deci n=3 **(2p)**

3.Demonstrați că $\log_{xyz} t+\log_{yzt} x+\log_{ztx} y+\log_{txy} z \geq \frac{4}{3},\ \forall x,y,z,t \in (1,\infty)$

Barem

Demostrăm că $\log_a b+\log_b a \geq 2$. **(2p)**

Analog $\log_a c+\log_c a \geq 2, \log_a d+\log_d a \geq 2 \log_c b+\log_b c \geq 2, \log_d b+\log_b d \geq 2$ și $\log_c d+\log_d c \geq 2$.

Însumate obținem $\log_a bcd+\log_b cda+\log_c abd+\log_d abc \geq 12$**(2p)**

Notăm a=xyz, b=yzt, c=ztx, d=txy și se înlocuiește în relația de mai sus. Astfel se obține

Adresa: Str. Mihai Eminescu, Nr. 11, 410019, Oradea,
Tel./fax: +40 (0) 259 41 64 54, +40 (0) 259 47 02 22 **Fax:** +40 (0) 259 41 80 16,
Web: www.isjbihor.ro - **E-mail:** contact@isjbihor.ro

$\log_{xyz} t + \log_{yzt} x + \log_{ztx} y + \log_{txy} z \geq \frac{4}{3},\ \forall x, y, z, t \in (1, \infty)$**(3p)**

4.Determinați valorile reale ale lui m pentru care funcția $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, f(x) = \begin{cases} -x^2 + mx + 1, x \leq 0 \\ x + 1, x > 0 \end{cases}$

este: a) injectivă b) surjectivă c) bijectivă.

Barem

a)$x_v = \frac{m}{2} \geq 0 <=> m \in [0, \infty)$**(3p)**

b) $m \in \boldsymbol{R}$ **(3p)**

c) $m \in [0, \infty)$**(1p)**

Adresa: Str. Mihai Eminescu, Nr. 11, 410019, Oradea,
Tel./fax: +40 (0) 259 41 64 54, +40 (0) 259 47 02 22 Fax: +40 (0) 259 41 80 16,
Web: www.isjbihor.ro - E-mail: contact@isjbihor.ro

BAREM

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ – 08.02.2025

Clasa a XI-a

Secțiunea H2
Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

1. Fie matircea A=$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

   a) Determinati a si b numere reale astfel incat: $A^2=a\cdot A+b\cdot I_2$

   b) Demonstrati ca: $A^n = nA + (1-n)I_2,\ n\epsilon\mathbb{N}, n \geq 2$

   c) Sa se arate ca suma elementelor matricei: A+A+….+A^n este numar par, oricare ar fi $n\epsilon\mathbb{N}, n \geq 1$

Barem

1. a)

$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$……………………………………………………………………………1p

$\begin{cases} 4a + b = 7 \\ -3a = -6 \\ 3a = 6 \\ -2a + b = -5 \end{cases}$ ……………………………………………………………………………1p

$a = 2\ si\ b = -1$……………………………………………………………………………1p

b) demonstrarea prin inductie sau alta metoda

P(n+1): $A^{n+1}=(n+1)A+(1-n-1)I_2=(n+1)A-nI_2$ ……………………………………………… *1p*

Din $A^{n+1}=A^n\cdot A=(nA+(1-n)I_2)\cdot A=nA^2+(1-n)A=n(2A-I_2)+(1-n)A=A(2n+1-n)-nI_2=(n+1)A-nI_2$ *q.e.d.*
………………………………………………………………………………………………*2p*

c) S=2n numar par ………………………………………………………………………………*1p*

2. a) Calculati, scriind sub forma de produs determinantul: $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

   b) Rezolvati pe multimea numerelor reale ecuatia: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4^x & 4 & 16 \\ 8^x & 8 & 64 \end{vmatrix} = 0$

Barem

a) $\Delta= (b-a)(c-a)(c-b)(ab+ac+bc)$ ……………………………………………4p

b) aplicand punctul a) cu a=$2^x, b = 2\ si\ c = 4$ ecuatia devine:

Adresa: Str. Mihai Eminescu, Nr. 11, 410019, Oradea,
Tel./fax: +40 (0) 259 41 64 54, +40 (0) 259 47 02 22 Fax: +40 (0) 259 41 80 16,
Web: www.isjbihor.ro - E-mail: contact@isjbihor.ro

$2(2-2^x)(4-2^x)(2^{x+1}+2^{x+2}+8)=0$ cu solutiile x=1 si x=2 ……………..……......3p

3.Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-tgx}{x+tgx}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x-sinx}{x+sinx}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}(3^x+x)^{\frac{1}{sinx}}$

Barem

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\left(1-\frac{tgx}{x}\right)}{x\left(1+\frac{tgx}{x}\right)}=\frac{1-1}{1+1}=0$………………………………………………..…………………. 1p

b) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x\left(1-\frac{sinx}{x}\right)}{x\left(1+\frac{sinx}{x}\right)}=\frac{1-0}{1+0}=1$…………………………………………………………………… 2p

c) $\lim\limits_{x\to 0}(1+(3^x+x-1))^{\frac{1}{3^x+x-1}\cdot\frac{3^x+x-1}{sinx}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x+x-1}{sinx}}$……………………..……..……… 1p

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x+x-1}{sinx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(3^x-1)+x}{x}\cdot\frac{x}{sinx}=1+ln3$ ………..……………………..…………………… 2p

Finalizare $\lim\limits_{x\to 0}(3^x+x)^{\frac{1}{sinx}}=3e$…………………………………………………...…………… 1p

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x+2}-ax-b, & x\geq 0\\ 3x+c, & x<0\end{cases}$

Determinați parametrii$a,b,c\in\mathbb{R}$ știind că f este continuă și $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

Barem

$\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-a-\frac{b}{x}\right)=0\Rightarrow 2-a=0\Rightarrow a=2$………………… 2p

$b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)+\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x\right)\right)$…………………………………… 1p

$b=\frac{3}{2}$……………………..……………………………………………………..……… 2p

$l_s(0)=l_d(0)=f(0)\Rightarrow c=1+\sqrt{2}-b$……………………………….….……...……… 1p

$c=\frac{2\sqrt{2}-1}{2}$ ………………………………………………………………………….……… 1p

Adresa: Str. Mihai Eminescu, Nr. 11, 410019, Oradea,
Tel./fax: +40 (0) 259 41 64 54, +40 (0) 259 47 02 22 **Fax**: +40 (0) 259 41 80 16,
Web: www.isjbihor.ro - **E-mail**: contact@isjbihor.ro

BAREM

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ – 08.02.2025

Clasa a XII-a

Secțiunea H2
Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

1) Se consideră G=(0; ∞)\ {1} pe care se definește legea de compoziție m*n=$m^{\frac{lnn}{2}}$, oricare ar fi m,n $\in G$. Rezolvați ecuația x*x*x=x.

Fie funcția f: R→ R f(x)=$\begin{cases} \frac{2x}{x^2+1}\, ln(x^{\,2}+1)+e^x+3\,, & x \geq 0 \\ x^2+2x+4, & x<0 \end{cases}$

a) Arătați că f admite primitive pe R

b) Pentru x∈[0; ∞), calculați o primitivă a funcției f(x), dacă F(1)= $\frac{(ln2)^2}{2}$+ e.

Barem

1) Aducerea ecuației la forma $(\frac{lnx}{2})^2=1$...1pct

Soluții x_1=e^2 , $x_2=\frac{1}{e^2}$...1 pct

2) a) f continuă pe (-∞; 0). f continuă pe (0;∞)…………………………………………….1 pct

$l_s(0)=l_d(0)$= f(0)= 4, f continuă pe R, f admite primitive pe R.......................................1 pct

$b)\ \int f(x)dx=\frac{(\ln(x^2+1))^2}{2}$+$e^x$ +3x+c..2 pct

$c=-3$...1 pct

2. Calculați

a) $\int_{-2}^{2}\ x^{2025}\sqrt{x^4-2x^2+1}$ dx

b) $\int_{-2025}^{2025}\ \sqrt[3]{x^3+x}$ dx

Barem

a) $\int_{-2}^{2}\ x^{2025}|x^2-1|$dx...1pct

$\int_{-2}^{2}\ x^{2025}|x^2-1|$dx= $\int_{-2}^{-1}x^{2025}(x^2-1)$ dx+ $\int_{-1}^{1}x^{2025}$(1-x^2) dx +

+ $\int_{1}^{2}x^{2025}(x^2-1)$ dx ………………………………………………………………..1 pct

Calcul și finalizare.. 2 pct

b) Arată că f impară ....2 pct

Adresa: Str. Mihai Eminescu, Nr. 11, 410019, Oradea,
Tel./fax: +40 (0) 259 41 64 54, +40 (0) 259 47 02 22 Fax: +40 (0) 259 41 80 16,
Web: www.isjbihor.ro - E-mail: contact@isjbihor.ro

Din f impară avem $\int_{-2025}^{2025} \sqrt[3]{x^3+x}\,dx=0$..1 pct

3. Se consideră mulțimea G= (2025;∞), pe care se definește a∆b= ab-2025a-2025b+2025^2 +2025 cu a, b$\in G$.

a) Arătați că pentru orice a,b$\in G$ avem a∆b$\in G$.
b) Arătați că (G, ∆) este grup abelian.
c) Determinați numerele reale x, y$\in G$ astfel încât lgx ∆ lgy= lgx
a) Demonstrați că funcția f : $(2025;\infty)\to R, f(x)=ln(x-2025)$ este un izomorfism între grupurile (G,∆) și (R,+).
b) Determinați m,n $\in Q\setminus Z$ astfel încât m∆n$\in N$

Barem

a) Verificare...1pct
b) Verificarea proprietăților ....2 pct
c) a∆b= (a-22025)(b-2025)+2025 =>(lgx-2025)(lgy-2025)-(lgx-2025)=0
=>(lgx-2025)(lgy-2026)=0, finalizare...1 pct
d) f bijectivă...1 pct
Verificare f morfism...1 pct
e) ex m-2025=3/5 și n-2025= 5/3 => $m\Delta n=2026$ număr natural..1 pct

4. Fie mulțimea G=R x R, pe care se definește legea de compoziție „○” prin:

(a,b) ○ (m,n)=(am, an+b)

a) Arătați că legea este asociativă
b) Determinați elementul neutru și elementele simetrizabile.
c) Aflați două elemente (a,b) și (m,n) din G pentru care (a,b)○(m.n)≠(m,n)○(a,b)
d) Determinați x$\in G$, astfel încât $(2^x, 2\cdot 2^x)\circ(2, 4\cdot 2^x)=(1,2)$

Barem

a) Verificare ....1 pct
b) (1,0) el neutru..1 pct
(1/a,-b/a) el simetric..2 pct
c) Rezolvarea cerinței...1 pct
d) $(2^{x+1}, 4\cdot 2^{2x}+2\cdot 2^x-2)$ =(1,2)...1 pct
Rezolvarea ecuațiilor și alegerea soluției convenabile x= -1...1 pct

Adresa: Str. Mihai Eminescu, Nr. 11, 410019, Oradea,
Tel./fax: +40 (0) 259 41 64 54, +40 (0) 259 47 02 22 Fax: +40 (0) 259 41 80 16,
Web: www.isjbihor.ro - E-mail: contact@isjbihor.ro