CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ , 10-02-2024

Clasa a IX-a

PROBLEMA 1.

Să se arate că are loc relația $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$ pentru orice k>1 și apoi să se demonstreze că

$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{2009^2} < 1.$

PROBLEMA 2.

Fie progresia geometrică $(a_n)_{n\geq 1}$ având termenii strict crescători. Știind că $a_1 = 2$ și $a_{n+1} = 4a_n - 3a_{n-1}$, determinați suma primilor n termeni.

PROBLEMA 3.

Demonstrați că dacă x^2, y^2, z^2 sunt în progresie aritmetică atunci $\frac{1}{y+z}, \frac{1}{z+x}, \frac{1}{x+y}$ sunt în progresie aritmetică.

PROBLEMA 4.

Fie *ABC* un triunghi și punctele *M*,*N*,*P* pe laturile triunghiului astfel încât $\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = \frac{\overrightarrow{BN}}{\overrightarrow{NC}} = \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PA}}$. Să se arate că triunghiurile *ABC* și *MNP* au același centru de greutate.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ, 10-02-2024

CLASA a X-a

PROBLEMA 1.

Fie funcția $f:(0,1)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{\log_x 3\cdot\log_x 9}+\frac{1}{\log_x 9\cdot\log_x 27}+\cdots+\frac{1}{\log_x 3^{2023}\cdot\log_x 3^{2024}}$.

a) Calculați $f\left(\frac{1}{3}\right)$;

b) Rezolvați ecuația $f(x)=\frac{2023}{506}$.

PROBLEMA 2.

Se consideră expresia $E(z)=\frac{z}{|z|}+\frac{|z|}{z}$, unde $z\in\mathbb{C}^*$.

a) Determinați $E(3-4i)$;

b) Demonstrați că $E(z)$ este un număr real, pentru orice $z\in\mathbb{C}^*$;

c) Demonstrați că $-2\le E(z)\le 2$, pentru orice $z\in\mathbb{C}^*$.

PROBLEMA 3.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^3+2}{3}$.

a) Să se arate ca funcția f este inversabilă pe $\mathbb{R}$ și să se determine inversa ei.

b) Să se rezolve pe $\mathbb{R}$ ecuația $3\sqrt[3]{3x-2}=x^3+2$.

PROBLEMA 4.

Fie A($-1+i\sqrt{3}$) un punct în planul complex. Să se determine coordonatele punctelor B, C și D astfel încât ABCD să fie un romb de arie egală cu 4 și cu centrul în originea O a reperului cartezian.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA LOCALĂ, 1-02-2024

CLASA a XI-a

PROBLEMA 1.

Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x^2 + 3$ şi numerele distincte a, b, c $\in \mathbf{Z}$**,** abscisele punctelor A, B, C de pe graficul funcţiei f.

a) Să se arate că determinantul $\Delta = 2(a - b)(b - c)(a - c)$ **,** unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

b) Arătaţi că aria Δ ABC este un număr natural.

PROBLEMA2.

Se consideră funcția $f :(0,\infty)\setminus\{1\} \to R$, $f(x)= \begin{cases} \frac{\ln(x^2-3x+3)}{x^2-x}, & \text{pt.} x < 1 \\ \frac{\sqrt{2x-1}-x}{x-1} + a, & \text{pt.} x > 1 \end{cases}$, $a \in R$.

a) Să se determine $a \in R$ astfel încât funcţia: are limită în $x_0=1$

b) Pentru a=1 să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției spre $+\infty$.

PROBLEMA 3.

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculaţi A^2 şi A^3.

b) Calculaţi $A + A^2 + A^3 + ... + A^{2024}$.

PROBLEMA 4.

Calculaţi limitele:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2^{x-1}+3^{x-2}-7}{x^2-9}$;

b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sin(4-x^2)}{x^2-3x+1}$;

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x\sqrt{x^2-4x+7}-2}{2x^2-9}$;

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ , 10-02-2024

Clasa a XII-a

PROBLEMA 1.

Pe mulțimea $G = (1; +\infty)$ se consideră legea de compoziție

$$x \circ y = \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2}$$

a) Să se arate că $(G, \circ)$ este grup abelian;

b) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care funcția

$f: (0; +\infty) \to G, f(x) = \sqrt{ax + b}$ este izomorfism între grupurile $\left((0; +\infty), \ .\ \right)$ și $(G, \circ)$

PROBLEMA 2.

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă

$x \circ y = 2024xy - 2024x - 2024y + 2025, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$

a) Determinați numerele reale egale cu simetricele lor în raport cu legea "∘".

b) Calculați $A = \frac{1}{2024} \circ \frac{2}{2024} \circ \frac{3}{2024} \circ \ldots \circ \frac{2025}{2024}$

PROBLEMA 3.

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+4}} dx, \ \forall n \in N^*$

a) Să se calculeze I_1.

b) Arătați că $(n+1)I_{n+1} + 4nI_{n-1} = \sqrt{5}$

PROBLEMA 4.

O funcție $f: R -> R$ de două ori derivabilă verifică $f''(x) = 2f(x)f'(x)$, oricare ar fi $x \in R$.

Să se calculeze

$\int \left(f'(x)\right)^2 f(x)dx$ în funcție de f și f'.