CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA LOCALĂ , 10-02-2024

Clasa a IX-a

1. **Feladat**

Igazoljátok, hogy bármely k>1 esetén teljesül az $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$ egyenlőtlenség, majd igazoljátok, hogy: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{2009^2} < 1$.

2. **Feladat**

Adott az $(a_n)_{n\geq 1}$ szigorúan növekvő mértani haladvány. Tudva, hogy $a_1 = 2$ és $a_{n+1} = 4a_n - 3a_{n-1}$, számítsátok ki az első n tag összegét.

3. **Feladat**

Ha tudjuk, hogy az x^2, y^2, z^2 számok számtani haladványban vannak, akkor igazoljátok, hogy az $\frac{1}{y+z}, \frac{1}{z+x}, \frac{1}{x+y}$ számok is számtani haladványban vannak.

4. **Feladat**

Az *ABC* háromszög oldalain felvesszük az *M*, *N*, *P* pontokat úgy, hogy $\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = \frac{\overrightarrow{BN}}{\overrightarrow{NC}} = \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PA}}$. Igazoljátok, hogy *ABC* és *MNP* háromszögeknek ugyanaz a súlypontja.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ, 10-02-2024

CLASA a X-a

1.Feladat

Adott az $f:(0,1)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{\log_x 3\cdot\log_x 9}+\frac{1}{\log_x 9\cdot\log_x 27}+\cdots+\frac{1}{\log_x 3^{2023}\cdot\log_x 3^{2024}}$ függvény.

a) Számítsátok ki $f\left(\frac{1}{3}\right)$;

b) Oldjátok meg az $f(x)=\frac{2023}{506}$ egyenletet.

2.Feladat

Tekintsük az $E(z)=\frac{z}{|z|}+\frac{|z|}{z}$ kifejezést, ahol $z\in\mathbb{C}^*$.

a) Számítsátok ki $E(3-4i)$;

b) Igazoljátok, hogy $E(z)$ valós szám, bármely $z\in\mathbb{C}^*$;

c) Igazoljátok, hogy $-2\le E(z)\le 2$, bármely $z\in\mathbb{C}^*$.

3.Feladat

Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^3+2}{3}$ függvény.

a) Igazoljátok, hogy az f függvény invertálható $\mathbb{R}$ -en és határozzátok meg az inverzét.

b) Oldjátok meg $\mathbb{R}$ -ben a következő egyenletet: $3\sqrt[3]{3x-2}=x^3+2$

4.Feladat

Legyen A(-1+i$\sqrt{3}$) egy pont a komplex számsíkban. Határozzátok meg a B, C és D pontok koordinátáit úgy, hogy az ABCD egy olyan rombusz legyen, melynek területe 4 és a középpontja a koordináta rendszer O kezdőponjában van.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ, 10-02-2024

CLASA a XI-a

1.FELADAT

Adott az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = 2x^2 + 3$ függvény és az $a, b, c \in \mathbf{Z}$ különböző számok**,** melyek az A, B, C pontok abszcisszái az f függvény grafikus képén.

a) Mutassátok ki, hogy $\Delta = 2(a-b)(b-c)(a-c)$ **,** ahol $\Delta = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

b) Igazoljátok, hogy az ABC háromszög területe egy természetes szám.

2.FELADAT

Adott az $f:(0,\infty)\setminus\{1\}\to R$, $f(x)=\begin{cases} \frac{\ln(x^2-3x+3)}{x^2-x}, & \text{pt.}x<1 \\ \frac{\sqrt{2x-1}-x}{x-1}+a, & \text{pt.}x>1 \end{cases}$, függvény, ahol $a\in R$.

a) Határozzátok meg $a\in R$ értékét, ha tudjuk, hogy a függvénynek létezik határértéke az $x_0=1$ pontban.

b) Ha a=1 határozzátok meg a függvény aszimptotáját $+\infty$ felé.

3.FELADAT

Adott az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix.

a) Számítsátok ki: A^2 és A^3.

b) Számítsátok ki: $A + A^2 + A^3 + ... + A^{2024}$.

4.FELADAT

Számítsátok ki a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2^{x-1}+3^{x-2}-7}{x^2-9}$;

b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(4-x^2)}{x^2-3x+1}$;

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x\sqrt{x^2-4x+7}-2}{2x^2-9}$;

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ , 10-02-2024

Clasa a XII-a

1.FELADAT

A $G = (1; +\infty)$ halmazon értelmezzük a következő műveletet:

$$x \circ y = \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2}$$

a) Igazoljátok, hogy $(G, \circ)$ Ábel-csoport;

b) Határozzátok meg az $a, b \in \mathbb{R}$ számokat úgy, hogy az

$f: (0; +\infty) \to G, f(x) = \sqrt{ax + b}$ függvény egy izomorfizmus legyen a $\left((0; +\infty), \ .\ \right)$ és $(G, \circ)$ csoportok között.

2.FELADAT

A valós számok halmazán értelmezzük az $x \circ y = 2024xy - 2024x - 2024y + 2025,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$, asszociatív műveletet.

a) Határozzátok meg azokat a valós számokat, amelyek egyenlőek a szimmetrikusaikkal a "∘" műveletre nézve.

b) Számítsátok ki: $A = \frac{1}{2024} \circ \frac{2}{2024} \circ \frac{3}{2024} \circ \dots \circ \frac{2025}{2024}$

3.FELADAT

Adott az $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+4}} dx,\ \forall n \in N^*$.

a) Számítsátok ki: I_1.

b) Igazoljátok, hogy: $(n+1)I_{n+1} + 4nI_{n-1} = \sqrt{5}$

4.FELADAT

Az $f: R -> R$ kétszer deriválható függvényre teljesül az $f''(x) = 2f(x)f'(x)$ egyenlőség, bármely $x \in R$. Számítsátok ki: $\int \left(f'(x)\right)^2 f(x) dx$ az f és f' függvényében.