CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ, 10-02-2024

Clasa a IX-a

1. Să se arate că are loc relația $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}$ pentru orice k>1 și apoi să se demonstreze că $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{2009^2}<1$.

Barem

Demonstrarea relației $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}$ **(3p)**.

Din $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)} \Rightarrow \frac{1}{k^2}<\frac{1}{(k-1)}-\frac{1}{k}$. **(2p)** Deci $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{2009^2}<1-\frac{1}{2009}<1$ **(2p).**

2. Fie progresia geometrică $(a_n)_{n\geq 1}$ având termenii strict crescători. Știind că $a_1=2$ și $a_{n+1}=4a_n-3a_{n-1}$, determinați suma primilor n termeni.

Barem

Din $a_{n+1}=4a_n-3a_{n-1} \Rightarrow a_1q^n=4a_1q^{n-1}-3a_1q^{n-2}$ **(2p)** Cum termenii sunt strict crescători deducem că $q\neq 0$, $q\neq 1$ **(1p).** Obținem ecuația $q^2-4q+3=0 \Rightarrow q=3$ **(2p)**. Deci $S_n=3^n-1$. **(2p)**

3. Demonstrați că dacă x^2,y^2,z^2 sunt în progresie aritmetică atunci $\frac{1}{y+z},\frac{1}{z+x},\frac{1}{x+y}$ sunt în progresie aritmetică.

Barem

Știm că $y^2=\frac{x^2+z^2}{2}$ **(1p).**

Calculăm $\frac{\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+y}}{2}=\frac{x+2y+z}{2(y+z)(x+y)}=\frac{x+2y+z}{2(xz+xy+yz+y^2)}=\frac{x+2y+z}{2\left(xz+xy+yz+\frac{x^2+z^2}{2}\right)}=$ **(3p)**

$= \frac{x+2y+z}{(2xz+2xy+2yz+x^2+z^2)} = \frac{x+2y+z}{2y(x+z)+(x+z)^2} = \frac{1}{x+z}$ **(3p).**

4. Fie *ABC* un triunghi și punctele *M*,*N*,*P* pe laturile triunghiului astfel încât $\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = \frac{\overrightarrow{BN}}{\overrightarrow{NC}} = \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PA}}$. Să se arate că triunghiurile *ABC* și *MNP* au același centru de greutate.

Barem

Fie *G* centrul de greutate al ΔABC atunci $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{O}$ **(1p)** și Q centrul de greutate al ΔMNP atunci $\overrightarrow{QM} + \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{QP} = \vec{O}$ **(1p)** dar $\overrightarrow{QM} = \frac{\overrightarrow{QA}+k\overrightarrow{QB}}{1+k}$, $\overrightarrow{QN} = \frac{\overrightarrow{QB}+k\overrightarrow{QC}}{1+k}$, $\overrightarrow{QP} = \frac{\overrightarrow{QC}+k\overrightarrow{QA}}{1+k}$ **(2p)** și înlocuind în relație avem $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} = \vec{O} \Rightarrow Q = G$. **(3p)**

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ, 10-0-2024

Clasa a X-a

PROBLEMA 1

Fie funcția $f:(0,1) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\log_x 3 \cdot \log_x 9} + \frac{1}{\log_x 9 \cdot \log_x 27} + \cdots + \frac{1}{\log_x 3^{2023} \cdot \log_x 3^{2024}}$.

a) Calculați $f\left(\frac{1}{3}\right)$;

b) Rezolvați ecuația $f(x) = \frac{2023}{506}$.

Barem de evaluare

a) $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{(-1)\cdot(-2)} + \frac{1}{(-2)\cdot(-3)} + \cdots + \frac{1}{(-2023)\cdot(-2024)}$ ……………………………………………1p

$f\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{2024} = \frac{2023}{2024}$ ……………………………………………………………………1p

b) $f(x) = \log_3 x \cdot \log_9 x + \log_9 x \cdot \log_{27} x + \ldots + \log_{3^{2023}} x \cdot \log_{3^{2024}} x$ ………………1p

$f(x) = (\log_3 x)^2 \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{2023\cdot 2024}\right) = (\log_3 x)^2 \cdot \frac{2023}{2024}$ ……………………………2p

Ecuația devine $(\log_3 x)^2 = 4$

I. $\log_3 x = 2 \Rightarrow x = 9$, care nu convine ……………………………………………………1p

II. $\log_3 x = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$, care convine ……………………………………………………1p

PROBLEMA 2

Se consideră expresia $E(z) = \frac{z}{|z|} + \frac{|z|}{z}$, unde $z \in \mathbb{C}^*$.

a) Determinați $E(3-4i)$;

b) Demonstrați că $E(z)$ este un număr real, pentru orice $z \in \mathbb{C}^*$;

c) Demonstrați că $-2 \leq E(z) \leq 2$, pentru orice $z \in \mathbb{C}^*$.

Barem de evaluare

a) $E(3-4i) = \frac{3-4i}{5} + \frac{5}{3-4i}$ ……………………………………………………………… 1p

$E(3-4i) = \frac{3-4i}{5} + \frac{5(3+4i)}{25} = \frac{6}{5}$ ……………………………………………………… 1p

b) $z = a + bi \Rightarrow E(z) = \frac{a+bi}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a+bi}$ ……………………………………………… 1p

$E(z) = \frac{a+bi}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{(a-bi)\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2} = \frac{2a}{\sqrt{a^2+b^2}} \in \mathbb{R}$ ……………………………………… 1p

c) $-1 \leq \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq 1$ ……………………………………………… 2p

$\Leftrightarrow \frac{a^2}{a^2+b^2} \leq 1$ ……………………………………………………………………… 1p

PROBLEMA 3

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3+2}{3}$.

a) Să se arate ca functia f este inversabilă pe $\mathbb{R}$ și să se determine inversa ei.
b) Să se rezolve pe $\mathbb{R}$ ecuația $3\sqrt[3]{3x-2} = x^3 + 2$.

Barem de evaluare

a) Demonstrarea inversabilității ……………………………...………..2p
Determinarea inversei $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \sqrt[3]{3x-2}$ ..……….................................……..1p
b) Scrierea echivalenței $f(x) = f^{-1}(x) <=> f^{-1}(x) = x$……………......................................2p
Găsirea soluțiilor ecuației inițiale: din $f^{-1}(x) = x$ =>$x^3 = 3x - 2 \Rightarrow$
$(x-1)(x^2+x-2)=0$ => S={1, - 2}..2p

PROBLEMA 4

Fie A($-1+i\sqrt{3}$) un punct în planul complex. Să se determine coordonatele punctelor B, C si D astfel încât ABCD să fie un romb de arie egală cu 4 și cu centrul în originea O a reperului cartezian.

Barem de evaluare

O mijlocul lui AC => $\frac{z_A+z_C}{2} = z_O,\ z_O = 0 => z_C = -z_A => C(1, -\sqrt{3})$ ……………………........1p
O mijlocul lui BD=> $\frac{z_B+z_D}{2} = z_O,\ z_O = 0 => z_D = -z_B$ …………………………..……......…..…..1p
$\overrightarrow{AC}(z_C - z_A) => \overrightarrow{AC}(-2z_A)$ iar $\overrightarrow{BD}(z_D - z_B) => \overrightarrow{BD}(-2z_B)$ ……………………...………..1p
$Daca\ B(x+yi) => \overrightarrow{BD}(-2x-2yi)\ iar\ \overrightarrow{AC}(+2-2\sqrt{3}i)$ ………………………………..……...1p
Din AC$\perp$ $BD => -4x + 4\sqrt{3}y = 0$ …………………………………………………...............…1p
Din $|z_A| \cdot |z_B| = 2 => 2\sqrt{x^2+y^2} = 2 => x^2 + y^2 = 1$ …………………………..........................1p
Final x= $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\ iar\ y = \pm\frac{1}{2} => B(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})\ si\ D\ (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ sau $B(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})\ si\ D\ (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ ……....1p

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ, 10-02-2024

CLASA a XI-a

Barem

PROBLEMA 1.

Fie funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = 2x^2 + 3$ şi numerele distincte a, b, c $\in \mathbf{Z}$, abscisele punctelor A, B, C de pe graficul funcţiei f.

a) Să se arate că determinantul $\Delta = 2(a-b)(b-c)(a-c)$, unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

b) Arătaţi că aria Δ ABC este un număr natural.

Barem

a) Calculul determinantului folosind proprietățile..4p

b)) $S = \frac{1}{2}|\Delta|$, $\Delta = \begin{vmatrix} a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ c & f(c) & 1 \end{vmatrix}$ 1p

din a) obţinem $\Delta = -2(a-b)(b-c)(a-c)$ 1p

a, b, c $\in \mathbf{Z} \Rightarrow 2|(a-b)(b-c)(a-c)|$ este număr natural par $\Rightarrow$ S = număr natural...1p

PROBLEMA 2.

Se consideră funcția $f:(0,\infty)\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} \frac{\ln(x^2-3x+3)}{x^2-x}, & \text{pt.} x<1 \\ \frac{\sqrt{2x-1}-x}{x-1}+a, & \text{pt.} x>1 \end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția are limită în $x_o=1$.

b) Pentru a=1 să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției spre $+\infty$.

Barem

a) f are limită în $x_o=1$ dacă și numai dacă $l_s(1)=l_d(1)$ ....1 p

calcul $l_s(1)= -1$ ....1 p

calcul $l_d(1)= a$ . ...1 p

concluzia finală: a= -1 ....1p

b) Calculul $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{2x-1}-x)(\sqrt{2x-1}+x)}{(x-1)(\sqrt{2x-1}+x)}+1=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-(x-1)^2}{(x-1)(\sqrt{2x-1}+x)}+1=0$ 2p

c)

Ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ este: y = 0 ....1p

PROBLEMA 3.

Fie matricele A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculaţi A^2 şi A^3.
b) Calculaţi $A + A^2 + A^3 + ... + A^{2024}$.

Barem

a) Calculul $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 2p

b) Demonstare prin inducție sau binomul lui Newton $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$..3p

Calulul sumei $A + A^2 + A^3 + ... + A^{2024} = \begin{pmatrix} 2024 & 2024 * 2025 \\ 0 & 2024 \end{pmatrix}$.........................2p

PROBLEMA 4.

Calculaţi limitele:

a) $\lim_{x\to 3} \frac{2^{x-1}+3^{x-2}-7}{x^2-9}$;
b) $\lim_{x\to 2} \frac{\sin(4-x^2)}{x^2-3x+2}$;
c) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x\sqrt{x^2-4x+7}-2}{2x^2-9}$;

Barem

a) $\lim_{x\to 3} \frac{2^{x-1}+3^{x-2}-7}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{2^{x-1}-4+3^{x-2}-3}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{4(2^{x-3}-1)}{(x-3)(x+3)} + \lim_{x\to 3} \lim_{x\to 3} \frac{3(3^{x-3}-1)}{(x-3)(x+3)} \ldots .2p$

Finalizare 1p

b) $\lim_{x\to 2} \frac{\sin(4-x^2)}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{\sin[(2-x)(2+x)]}{(x-2)(x-1)}$ = - 4 ....2p

c) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x\sqrt{x^2-4x+7}-2}{2x^2-9} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x^2\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{7}{x^2}}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{9}{x^2}\right)}$.................. .. ..1p

Finalizare 1p

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ, 10-02-2024

Clasa a XII-a

PROBLEMA 1.

Pe mulțimea $G = (1; +\infty)$ se consideră legea de compoziție

$$x \circ y = \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2}$$

a) Să se arate că $(G, \circ)$ este grup abelian;

b) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care funcția

$f: (0; +\infty) \to G, f(x) = \sqrt{ax + b}$ este izomorfism între grupurile $\big((0; +\infty), \ .\ \big)$ și $(G, \circ)$

a) $(G, \circ)$ grup abelian 3p;

b) Din egalitatea $f(x\,.\,y) = f(x) \circ f(y)$

$=> \sqrt{axy + b} = \sqrt{(ax + b)(ay + b) - (ax + b) - (ay + b) + 2}$ 1p;

$=> axy + b = a^2xy + x(ab - a) + y(ab - a) + b^2 - 2b + 2$ 1p;

obținem $a^2 = a, ab - a = 0$ și $b = b^2 - 2b + 2$

de unde $a = 1, b = 1$ 1p;

$=>$ funcția $f(x) = \sqrt{x + 1}$ 1p;

PROBLEMA 2.

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă

$x \circ y = 2024xy - 2024x - 2024y + 2025, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$

a) Determinați numerele reale egale cu simetricele lor în raport cu legea "$\circ$".

b) Calculați $A = \frac{1}{2024} \circ \frac{2}{2024} \circ \frac{3}{2024} \circ \ldots \circ \frac{2025}{2024}$

Soluție:

a) Elementul neutru al legii este $e = \frac{2025}{2024}$ 1p;

Condiția $x = x'$ revine $2024\,(x-1)^2 + 1 = e$,

adică $|x - 1| = \frac{1}{2024}$ 2p;

Obținem soluțiile $x_1 = \frac{2023}{2024}$ și $x_2 = \frac{2025}{2024}$.. ....1p;

b) Deoarece $x \circ y = 2024\,(x-1)(y-1) + 1,$ rezultă că

$x \circ 1 = 1 \circ x = 1,$ pentru orice *x* real 1p;

Numărul $1 = \frac{2024}{2024}$ se găsește în șirul .$\frac{1}{2024}, \frac{2}{2024}, \ldots, \frac{2024}{2024}, \frac{2025}{2024}$

Cum legea dată este asociativă deducem că

$A = \left(\frac{1}{2024} \circ \ldots \circ \frac{2023}{2024}\right) \circ 1 \circ \left(\frac{2025}{2024}\right) = x \circ 1 \circ y = 1$ 2p;

PROBLEMA 3.

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+4}} dx, \ \forall n \in N^*$

a) Să se calculeze I_1.

b) Arătați că $(n+1)I_{n+1}$+$4nI_{n-1} = \sqrt{5}$

Soluție:

a) $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx = \sqrt{x^2+4}\,|_0^1 = \sqrt{5} - 2$ 2p;

b) $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{x^2+4}} dx = \int_0^1 x^n \left(\sqrt{x^2+4}\right)' dx = x^n \sqrt{x^2+4}\,|_0^1 -$

$- \int n x^{n-1} \sqrt{x^2+4}\, dx$ 1p;

$I_{n+1} = \sqrt{5} - n \int x^{n-1} \sqrt{x^2+4}\, dx$ 2p;

Se obține

$I_{n+1} = \sqrt{5} - nI_{n+1} - 4I_{n-1} <=>$

$(n+1)I_{n+1} + 4I_{n-1} = \sqrt{5}, \forall n \geq 2, n \in N$ 2p;

PROBLEMA 4.

O funcție $f: R -> R$ de două ori derivabilă verifică $f''(x) = 2f(x)f'(x)$, oricare ar fi $x \in R$.

Să se calculeze

$\int \left(f'(x)\right)^2 f(x) dx$ în funcție de f *și* f'.

Soluție:

Integrând prin părți avem

$I = \int \left(f'(x)\right)^2 f(x)\, dx = \int f'(x) \frac{1}{2} f''(x) dx$..2p;

$= \frac{1}{2} \int f'(x) \left(f'(x)\right)' dx$ 2p;

$= \frac{1}{2} f'(x) f'(x) - \frac{1}{2} \int f''(x)\, f'(x) dx = \frac{1}{2}\left(f'(x)\right)^2 - I$ 2p;

deci $I = \frac{1}{4} \left(f'(x)\right)^2$+ c 1p;