CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „Adolf Haimovici”
Etapa locală, 25 februarie 2023
Clasa a IX-a

PROBLEMA 1

Comparați x cu y, unde

$$x=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+\ldots+\frac{\sqrt{2023}-\sqrt{2022}}{\sqrt{2022\cdot 2023}} \text{ și } y=\frac{\sqrt{2023}+\sqrt{2022}}{\sqrt{2021}+\sqrt{2022}}$$

PROBLEMA 2

Calculați $S=1+2023+2023^2+\ldots 2023^n$ și demonstrați că $(2023^n-1)\,\vdots\,2022,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

OBSERVAȚIE: Simbolul $\vdots$ se citește „se divide”

PROBLEMA 3

a) Știind că a, b, c sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice demonstrați că b+c, a+c și a+b sunt în progresie aritmetică.

b) Fie x un element al mulțimii: $A=\{x \mid x\in\mathbb{Z}, |x-2|\le 3\}$ Aflați valoarea lui x știind că x-1, 2x+3, 3x+7 sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

PROBLEMA 4

Fie pătratul ABCD, M mijlocul laturii AB și N mijlocul laturii BC.

a) Descompuneți vectorii $\overrightarrow{AN}$ ȘI $\overrightarrow{CM}$ după $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AD}$
b) Verificați dacă vectorii: $\vec{u}=3\overrightarrow{AN}+6\overrightarrow{CN}$ și $\vec{v}=-\overrightarrow{AD}$ sunt coliniari.

TIMP DE LUCRU 3 ore

Succes!

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „Adolf Haimovici”
Etapa locală, 25 februarie 2023
Clasa a X-a

PROBLEMA 1

Calculați:

a) $15-5\sqrt[3]{0,125}$ b) $2\cdot\log_2 3+3\cdot\log_2 10-\log_2 1125$ c) $2023^{\log_{2023}5}-\log_{2023} 2023^5$

PROBLEMA 2

a) Determinați $\frac{x}{y}$ dacă 2lg(x-12y)=lgx+lgy, unde x>12y>0.

b) Calculați pătratul numărului a= $\log^2{}_3 9+\log_{\frac{1}{4}} 2$

PROBLEMA 3

a) Calculați $i^{2023}+i^{-2023}+(1+i)^{20}$

b) Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuația: $(1-z)(2z-1)=z^2$

PROBLEMA 4

Se dau funcțiile: $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=2023^x$, $g:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, $g(x)=\log_{2023^{-1}} x$, $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=\sqrt[3]{x}$.

a) Care dintre cele trei funcții este crescătoare?

b) Care dintre cele trei funcții este funcție pară?

c) Care dintre cele trei funcții este descrescătoare?

d) Care dintre cele trei funcții este mărginită inferior?

e) Care dintre cele trei funcții este periodică?

f) Reprezentați graficul uneia dintre funcțiile date

TIMP DE LUCRU 3 ore

Succes!

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „Adolf Haimovici”

Etapa locală, 25 februarie 2023

Clasa a XI-a

PROBLEMA 1.

a) Demonstrați că pentru orice matrice $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ are loc relația $X^2 - (a+d)X + (detX) \cdot I_2 = O_2$.

b) Determinați $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X^{2023} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

PROBLEMA 2.

Fie matricea $A_k = \begin{pmatrix} 3 & 2k-1 \\ 3^k & k^2 \end{pmatrix}$. Calculați S=$A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_{100}$.

PROBLEMA 3.

Știind că $a, b \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $a + b = \pi$, calculați:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{tg(\,ax+bx-\pi)}{(ax+bx)^2-\pi^2}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{sin(\,ax+b)}{x-1}$.

PROBLEMA 4.

Fie funcția f:$\boldsymbol{R} - \{1\} \to \boldsymbol{R}, f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x+1}$. Determinați valorile lui a și b știind că dreapta de ecuație y = x + 2 este asimptotă oblică la infinit și punctul **P(2,5)** aparține graficului funcției.

Timp de lucru 3 ore

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „Adolf Haimovici”

Etapa locală, 25 februarie 2023

Clasa a XII-a

PROBLEMA 1.

Fie mulțimea $G = \left\{A(x) = \begin{pmatrix} 1+2x & 4x \\ -x & 1-2x \end{pmatrix}, x \in R\right\}$.

a) Arătați că $A(x)A(y) = A(x+y), \forall x, y \in \boldsymbol{R}$.
b) Calculați $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^n, n \in \boldsymbol{N}^*$.

PROBLEMA 2.

Pe $A = [0,2]$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{4x+4y}{4+xy}, x, y \in A$.

a) Arătați că legea este asociativă.
b) Să se verifice că dacă $x, y, z \in A$ *și* $x * z = y * z$, atunci x=y.
c) Determinați $x \in A$ care verifică relația $x * x * x = 0$.

PROBLEMA 3.

Fie $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx, n \in N^*$.

a) Calculaţi I_0 și I_1.
b) Exprimați șirul I_n în funcție de I_{n-1}.

PROBLEMA 4.

Arătați că există numerele reale a, b, c astfel încât $F(x) = (ax^2 + b)\cos x + cx \sin x$ este o primitivă a funcției $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, f(x) = x^2 \sin x$.

Timp de lucru 3 ore