CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală, 1 februarie 2020
Clasa a IX-a

Subiectul 1

Să se rezolve ecuația: $\left(3x+\frac{1}{3}\right)+\left(3x+\frac{4}{3}\right)+\left(3x+\frac{7}{3}\right)+\cdots+\left(3x+\frac{37}{3}\right)=121,(3)$.

Subiectul 2

a) Demonstrați că pentru orice număr natural n, numărul 7^n-1 se divide cu 6.

b) Găsiți numerele naturale n pentru care 2^n-1 se divide cu 7.

Subiectul 3

Fie a și b două numere reale și pozitive. Valorile expresiilor a + b, a−b, ab și $\frac{a}{b}$ așezate în ordine crescătoare sunt, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{7}{4}$. Aflați valorile numerelor reale și pozitive a și b.

Subiectul 4

Pe latura (AB) și diagonala (AC) ale paralelogramului ABCD se iau punctele M, respectiv N, astfel încât $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. Arătați că punctele M, N, D sunt coliniare.

Notă:

[1]Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2]Toate problemele sunt obligatorii;
[3]Fiecare problemă se notează a de la 0 la 7;

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

Etapa locală, 1 februarie 2020
Clasa a X-a

Subiectul 1

Fie $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ cu $|z| = 1$. Demonstrați că există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $a = \frac{1+ai}{1-ai}$.

Subiectul 2

Se consideră expresia $E(x) = \log_{3-x}(3+x)$.

a) Determinați mulțimea D pe care este definită expresia $E(x)$.

b) Arătați că $E(a)E(-a) = 1, \forall a \in D$

c) Calculați $E\left(\sqrt{8}\right)$.

Subiectul 3

Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} (2m-1)x - 2, x \leq 1 \\ 2x + 3, x > 1 \end{cases}$.

a) Determinați valorile lui m pentru care funcția f este injectivă.
b) Determinați valorile lui m pentru care funcția f este surjectivă.
c) Determinați valorile lui m pentru care funcția f este bijectivă.

Subiectul 4

Determinați funcția bijectivă $f: \boldsymbol{R} \to R, f(x) = ax + b$ cu $a, b \in \boldsymbol{R}$ și $a \neq 0$ a cărei inversă este funcția $g: \boldsymbol{R} \to R, g(x) = 2x - 5$

Notă:

[1] *Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;*
[2] *Toate problemele sunt obligatorii;*
[3] *Fiecare problemă se notează a de la 0 la 7;*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală, 1 februarie 2020
Clasa a XI-a

Subiectul 1

Fie funcția $f: R \to R$, f(x)=$\sqrt{16x^2+1}+4x-5$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$;

b) Câte asimptote admite graficul funcției f?

Subiectul 2

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $C(A)=\{X \in M_3(\boldsymbol{R}) | A\cdot X = X\cdot A\}$.

a) Să se arate că matricea $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ aparține mulțimii $C(A)$.

b) Să se arate că dacă matricea X este din $C(A)$ atunci X este de forma $\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 3c & 0 & a \end{pmatrix}$.

c) Să se arate că dacă matricea Y aparține mulțimii $C(A)$ și $Y^2=O_3$, atunci $Y=O_3$.

Subiectul 3

Să se calculeze $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+x+x^2+...+x^n-(n+1)}{x-1}$, n $\in$ **N*.**

Subiectul 4

Fie punctele A(4, 4), B(10, 2). Determinați punctul C situat pe dreapta d: x - 2y + 4 = 0 astfel încât aria triunghiului ABC să fie 5.

Notă:

[1]*Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;*

[2]*Toate problemele sunt obligatorii;*

[3]*Fiecare problemă se notează a de la 0 la 7;*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

Etapa locală, 1 februarie 2020
Clasa a XII-a

Subiectul 1

Se consideră matricea $A_x = \begin{pmatrix} 2020 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$, pentru x$\in$**R** și mulțimea $G = \{A_x | x \in \mathbf{R}\} \subset M_3(\mathbf{R})$.

a) Să se verifice că $I_3 \in M$, unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Să se demonstreze că $A_x \cdot A_y = A_{x+y}$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$.

c) Să se arate că $(G,\cdot)$ este grup comutativ.

Subiectul 2

Se consideră funcțiile $f, g\colon \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \boldsymbol{R}$, definite prin $f(x) = \dfrac{e^x + \cos x}{e^x + \cos x + \sin x}$ ş $g(x) = \dfrac{\sin x}{e^x + \cos x + \sin x}$.

a) Să se calculeze $\int [f(x) + g(x)]dx$ și $\int [f(x) - g(x)]dx$.

b) Să se arate că funcțiile f și g admit primitive și să se calculeze primitivele acestora.

Subiectul 3

Pe **R** se definește legea de compoziție "$*$" astfel: $x * y = ax + by + c, \forall x, y \in \mathbf{R}$ unde $a, b, c \in \mathbf{R}$. Determinați constantele a, b, c știind că $(\mathbf{R},*)$ este grup cu elementul neutru 3.

Subiectul 4

Fie $f : (-1, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{15x\sqrt{x+1}}{2}$. Să se determine a, b, c astfel încât funcția $F : (-1, \infty) \to \mathbf{R}$, $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{x+1}$ să fie o primitivă a lui f .

Notă:

[1]*Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;*

[2]*Toate problemele sunt obligatorii;*

[3]*Fiecare problemă se notează a de la 0 la 7;*