

CONCURSUL NAȚIONAL DE
MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală, 1 februarie 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX-a

Subiectul 1

Să se rezolve ecuația: $(3x + \frac{1}{3}) + (3x + \frac{4}{3}) + (3x + \frac{7}{3}) + \dots + (3x + \frac{37}{3}) = 121, (3)$.

Barem

Se observă ca termenii sunt în progresie aritmetică având $r=1$. **(1p)**

Aflarea numărului de termeni $n=13$. **(2p)**

$$S_n = 39x + \frac{38}{2} \cdot 13 = 39x + \frac{247}{3} \text{ (2p)}$$

$x=1$ **(2p)**

Subiectul 2

- Demonstrați că pentru orice număr natural n , numărul $7^n - 1$ se divide cu 6.
- Găsiți numerele naturale n pentru care $2^n - 1$ se divide cu 7.

Barem

- Inducția matematică **(4p)**
- Deoarece $2^{k+3} - 1 = 8 \cdot 2^k - 1 = 7 \cdot 2^k + (2^k - 1)$, avem $P(k) \Leftrightarrow P(k+3)$ **(2p)**
Cum $P(0)$ adevărată și $P(1), P(2)$ false, deducem ca $n \in \{0, 3, 6, \dots, 3k, \dots\}$ **(1p)**

CONCURSUL NAȚIONAL DE
MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”

Etapă locală, 1 februarie 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX-a

Subiectul 3

Fie a și b două numere reale și pozitive. Valorile expresiilor $a + b$, $a - b$, ab și $\frac{a}{b}$ așezate în ordine crescătoare sunt $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{7}{4}$. Aflați valorile numerelor reale și pozitive a și b .

Barem

Deoarece din cele patru valori date, nu avem nici unul negativ, considerăm: $a > b$, deci $\frac{a}{b} > 1$

Astfel avem $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$ sau $\frac{a}{b} = \frac{7}{4}$ **(2p)**

Dacă $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$ atunci $\frac{a+b}{a-b} = 7$. Din fracțiile din enunț doar $\frac{7}{4} : \frac{1}{4} = 7$ deci, $a + b = \frac{7}{4}$,

adică $a = 1$, $b = \frac{3}{4}$. **(2p)**

Dacă $\frac{a}{b} = \frac{7}{4}$ atunci $\frac{a+b}{a-b} = \frac{11}{3}$. Dar $\frac{11}{3}$ nu face parte din fracțiile date în enunțul problemei.

(2p)

Deci soluția unică a problemei este $a = 1$, $b = \frac{3}{4}$. **(1p)**

Subiectul 4

Pe latura (AB) și diagonala (AC) ale paralelogramului $ABCD$ se iau punctele M , respectiv N , astfel încât $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. Arătați că punctele M , N , D sunt coliniare.

Barem

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} = \\ &= -\frac{1}{30}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{6}\overrightarrow{MD} \text{ (pentru fiecare egalitate obținută se acordă un punct)}\end{aligned}$$

Din relația $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{MD}$ rezultă că punctele M , N și D sunt coliniare. **(1p)**

CONCURSUL NAȚIONAL DE
MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”

Etapă locală, 1 februarie 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X-a

Subiectul 1

Fie $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ cu $|z| = 1$. Demonstrați că există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $z = \frac{1+ai}{1-ai}$.

Barem

$$z = \frac{1+ai}{1-ai} \Rightarrow a = \frac{z-1}{i(z+1)} \quad (2p)$$

$$\bar{a} = \frac{\bar{z}-1}{-i(\bar{z}+1)} \quad (1p)$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z} \quad (1p)$$

$$\bar{a} = \frac{\frac{1}{z}-1}{-i(\frac{1}{z}+1)} = \frac{z-1}{i(z+1)} \quad (1p)$$

$$\bar{a} = a \Rightarrow a \in \mathbb{R} \quad (2p)$$

Subiectul 2

Se consideră expresia $E(x) = \log_{3-x}(3+x)$.

a) Determinați mulțimea D pe care este definită expresia $E(x)$.

b) Arătați că $E(a)E(-a) = 1, \forall a \in D$

c) Calculați $E(\sqrt{8})$.

Barem

$$a) \text{ condiții } \begin{cases} 3-x > 0 \\ 3-x \neq 1 \\ 3+x > 0 \end{cases} \quad (1p)$$

$$\text{Rezultă } D = (-3, 3) - \{2\} \quad (1p)$$

$$b) E(a)E(-a) = \log_{3-a}(3+a) \cdot \log_{3+a}(3-a) \quad (1p)$$

aducem la aceeași bază și obținem rezultatul 1 (1p)

$$c) E(\sqrt{8}) = \log_{3-\sqrt{8}}(3+\sqrt{8}) = \log_{3-\sqrt{8}} \frac{(3+\sqrt{8})(3-\sqrt{8})}{(3-\sqrt{8})} \quad (2p)$$

$$\log_{3-\sqrt{8}} \frac{1}{(3-\sqrt{8})} = 1 \quad (1p)$$

CONCURSUL NAȚIONAL DE
MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”

Etapă locală, 1 februarie 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X-a

Subiectul 3

Fie funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} (2m-1)x - 2, & x \leq 1 \\ 2x + 3, & x > 1 \end{cases}$.

- a) Determinați valorile lui m pentru care funcția f este injectivă.
- b) Determinați valorile lui m pentru care funcția f este surjectivă.
- c) Determinați valorile lui m pentru care funcția f este bijectivă.

Barem

a) Condiție $2m-1 > 0 \Rightarrow m \in (\frac{1}{2}, \infty)$; **(1p)** $f_1(1) \leq f_2(1) \Rightarrow m \in (-\infty, 4]$ **(1p)** $\Rightarrow m \in (\frac{1}{2}, 4]$ **(1p)**.

b) Condiție $2m-1 > 0 \Rightarrow m \in (\frac{1}{2}, \infty)$; **(1p)** $f_1(1) \geq f_2(1) \Rightarrow m \in [4, \infty)$ **(1p)** $\Rightarrow m \in [4, \infty)$ **(1p)**.

c) Din a și b rezultă ca $m=4$. **(1p)**.

Subiectul 4

Determinați funcția bijectivă $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$ cu $a, b \in \mathbf{R}$ și $a \neq 0$ a cărei inversă este funcția $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = 2x - 5$

Barem

Funcția bijectivă $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$ are ca inversă funcția $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ $g(t) = \frac{1}{a}t - \frac{b}{a}$, unde

$a \in \mathbf{R}^*$ **(5p)**

Deci $a = \frac{1}{2}$ și $b = \frac{5}{2}$ **(2p)**.

CONCURSUL NAȚIONAL DE
MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

Etapă locală, 1 februarie 2020
BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI-a

Subiectul 1

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{16x^2 + 1} + 4x - 5$.

a) Calculați $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$;

b) Câte asimptote admite graficul funcției f ?

Barem

a) Suntem în cazul $\infty - \infty$. Facem o schimbare de variabilă, amplificăm cu conjugata expresiei și obținem: $L = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{16x^2 + 1} - 4x - 5) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16x^2 + 1 - 16x^2 - 40x - 25}{\sqrt{16x^2 + 1} + 4x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-40x - 24}{\sqrt{16x^2 + 1} + 4x + 5} = \dots = -5$ (3 p)

b) Din a) observăm că dreapta $y = -5$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$. (1 p)

Spre ∞ nu există asimptotă orizontală. Căutăm asimptotă oblică, de forma $y = mx + n$.

Obținem $m = 8$ și $n = -5$. În concluzie $y = 8x - 5$ este asimptotă oblică spre ∞ (2 p)

Deci graficul funcției f admite 2 asimptote. (1 p)

Subiectul 2

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $C(A) = \{X \in M_3(\mathbb{R}) \mid A \cdot X = X \cdot A\}$.

a) Să se arate că matricea $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ aparține mulțimii $C(A)$.

b) Dacă matricea X este din $C(A)$ atunci X este de forma $\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 3c & 0 & a \end{pmatrix}$.

c) Dacă matricea Y aparține mulțimii $C(A)$ și $Y^2 = O_3$, atunci $Y = O_3$.

Barem

a) Verifică prin calcul direct că $AB = BA$ (2p)

b) Obține X de forma căutată (2p)

c) Deduce necesitatea ca Y să fie de forma anterioară (1p)

Calculează Y^2 și finalizare (2p)

CONCURSUL NAȚIONAL DE
MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală, 1 februarie 2020
BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI-a

Subiectul 3

Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x+x^2+\dots+x^n-(n+1)}{x-1}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

Barem

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x+x^2+\dots+x^n-(n+1)}{x-1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-1)+(x-1)+(x^2-1)+\dots+(x^n-1)}{x-1} = \dots\dots\dots(2p)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)+(x-1)(x+1)+\dots+(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+1)}{x-1} = \dots\dots\dots(2p)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)[1+(x+1)+\dots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+1)]}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} [1+(x+1)+\dots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+1)] = \dots\dots\dots(2p)$$

$$= 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \dots\dots\dots(1p)$$

Subiectul 4

Fie punctele A(4, 4), B(10, 2). Determinați punctul C situat pe dreapta d: $x - 2y + 4 = 0$ astfel încât aria triunghiului ABC să fie 5.

Barem

$$\text{Fie } C(a, b) \Rightarrow A_{ABC} = \frac{|\Delta|}{2} = 5, \Delta = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 2a + 6b - 32 \dots\dots\dots(2p)$$

$$\Rightarrow |2a + 6b - 32| = 10 \Rightarrow 2a + 6b - 32 = \pm 10. (1) \dots\dots\dots(2p)$$

$$\text{Dar } C \in d \Rightarrow a - 2b + 4 = 0 (2) \dots\dots\dots(1p)$$

Rezolvând sistemele format din relațiile (1) și (2) obținem

$$a = 6 \text{ și } b = 5 \Rightarrow C_1(6, 5) \dots\dots\dots(1p)$$

$$a = 2 \text{ și } b = 3 \Rightarrow C_2(2, 3) \dots\dots\dots(1p)$$

CONCURSUL NAȚIONAL DE
MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală, 1 februarie 2020
BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII-a

Subiectul 1

Se consideră matricea $A_x = \begin{pmatrix} 2020 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$, pentru $x \in \mathbf{R}$ și mulțimea $G = \{A_x | x \in \mathbf{R}\} \subset M_3(\mathbf{R})$.

a) Să se verifice că $I_3 \in G$, unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Să se demonstreze că $A_x \cdot A_y = A_{x+y}$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$.

c) Să se arate că (G, \cdot) este grup comutativ.

Barem

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2020 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \left. \vphantom{A_0} \right\} \Rightarrow I_3 \in G \quad \mathbf{1p}$$

$A_0 \in G$

b) $A_x \cdot A_y = \begin{pmatrix} 2020^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2020^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2020^{x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x+y & 1 \end{pmatrix} =$
 $= A_{x+y}, \forall x, y \in \mathbf{R} \quad \mathbf{2p}$

c) Conform punctului b) $A_x \cdot A_y = A_{x+y} \in G, \forall x, y \in \mathbf{R} \Rightarrow G$ este parte stabilă a lui $M_3(\mathbf{R})$ în raport cu “ \cdot ”.

G₁) Asociativitatea. Înmulțirea matricelor pe mulțimea G este asociativă deoarece este operație indusă de înmulțirea matricelor pe $M_3(\mathbf{R})$.

G₂) Comutativitatea: $\forall A_x, A_y \in G, A_x \cdot A_y = A_y \cdot A_x$

$$\left. \begin{array}{l} A_x \cdot A_y = A_{x+y}, \forall x, y \in \mathbf{R} \\ A_y \cdot A_x = A_{y+x} = A_{x+y} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{“} \cdot \text{” comutativă.}$$

G₃) Elementul neutru:

$\exists A_0 = I_3 \in G$ astfel încât $A_x \cdot A_0 = A_0 \cdot A_x = A_x, \forall A_x \in G \Rightarrow A_0$ element neutru.

G₄) Elementele simetrizabile:

$\forall A_x \in G, \exists A_{x'} \in G$ astfel încât $A_x \cdot A_{x'} = A_{x'} \cdot A_x = I_3$

$$A_x \cdot A_{x'} = A_{x'} \cdot A_x = I_3 \Leftrightarrow A_{x+x'} = A_{x'+x} = A_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2020^{x+x'} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x+x' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2020 = 0 \\ x + x' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x' = -x \Rightarrow$$

$A_{x'} = A_{-x} \in G$ este simetricul lui A_x .

4p

CONCURSUL NAȚIONAL DE
MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

Etapa locală, 1 februarie 2020
BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII-a

Subiectul 2

Se consideră funcțiile $f, g: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbf{R}$, definite prin $f(x) = \frac{e^x + \cos x}{e^x + \cos x + \sin x}$ și $g(x) = \frac{\sin x}{e^x + \cos x + \sin x}$.

a) Să se calculeze $\int [f(x) + g(x)]dx$ și $\int [f(x) - g(x)]dx$.

b) Să se arate că funcțiile f și g admit primitive și să se calculeze primitivele acestora.

Barem

a) Funcțiile f și g sunt continue, deci și funcțiile $f + g$, respectiv $f - g$ sunt tot continue, de unde rezulta că $f, g, f + g, f - g$ admit primitive pe intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ **(1p)**

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int \left(\frac{e^x + \cos x}{e^x + \cos x + \sin x} + \frac{\sin x}{e^x + \cos x + \sin x} \right) dx = \int dx = x + c$$

(2p)

$$\begin{aligned} \int [f(x) - g(x)]dx &= \int \left(\frac{e^x + \cos x}{e^x + \cos x + \sin x} - \frac{\sin x}{e^x + \cos x + \sin x} \right) dx = \int \frac{(e^x + \cos x + \sin x)'}{e^x + \cos x + \sin x} = \\ &= \ln(e^x + \cos x + \sin x) + c \end{aligned}$$

(2p)

b) Notăm cu $I = \int f(x)dx$ și $J = \int g(x)dx$. În aceste condiții, din a) rezultă

$$\begin{cases} I + J = x \\ I - J = \ln(e^x + \cos x + \sin x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = \frac{1}{2}(x + \ln(e^x + \cos x + \sin x)) + c_1 \\ J = \frac{1}{2}(x - \ln(e^x + \cos x + \sin x)) + c_2 \end{cases}, \text{ unde } c_1, c_2 \in \mathbf{R}. \text{ (2p)}$$

CONCURSUL NAȚIONAL DE
MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

Etapa locală, 1 februarie 2020
BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII-a

Subiectul 3

Pe \mathbf{R} se definește legea de compziție "*" astfel: $x * y = ax + by + c, \forall x, y \in \mathbf{R}$ unde $a, b, c \in \mathbf{R}$.
Determinați constantele a, b, c știind că $(\mathbf{R}, *)$ este grup cu elementul neutru 3.

Barem

$x \circ 3 = 3 \circ x = x, \forall x \in \mathbf{R}$ (1p). Pentru $x=0$ obținem $3b + c = 0$ și $3a + c = 0$ (2p) $\Rightarrow a = b$ (1p). Pentru $x=1$ obținem $a + 3b + c = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 1$ (2p) $\Rightarrow c = -2$ (1p).

Subiectul 4

Fie $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{15x\sqrt{x+1}}{2}$. Să se determine a, b, c astfel încât funcția $F : (-1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$,
 $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{x+1}$ să fie o primitivă a lui f.

Barem

$$F'(x) = f(x), \forall x > -1 \text{ (1p)}$$

$$(2ax + b)\sqrt{x+1} + \frac{ax^2 + bx + c}{2\sqrt{x+1}} = \frac{15x\sqrt{x+1}}{2}, \forall x > -1 \text{ (2p)}$$

$$(15a - 15)x^2 + (4a + 3b - 15)x + 2b + c = 0, \forall x > -1. \text{ (1p)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5a - 15 = 0 \\ 4a + 3b - 15 = 0 \\ 2b + c = 0 \end{cases} \text{ (1p)} \Rightarrow a = 3, b = 1, c = -2. \text{ (2p)}$$