CONCURSUL NAȚIONAL DE

MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală, 1 februarie 2020

BAREM DE CORECTARE - **Clasa a IX-a**

Subiectul 1

Să se rezolve ecuația: $\left(3x+\frac{1}{3}\right)+\left(3x+\frac{4}{3}\right)+\left(3x+\frac{7}{3}\right)+\cdots+\left(3x+\frac{37}{3}\right)=121,(3)$.

Barem

Se observă ca termenii sunt în progresie aritmetică având r=1. **(1p)**

Aflarea numărului de termeni n=13. **(2p)**

$S_n=39x+\frac{\frac{38}{3}}{2}\cdot 13=39x+\frac{247}{3}$ **(2p)**

x=1 **(2p)**

Subiectul 2

a) Demonstrați că pentru orice număr natural n, numărul 7^n-1 se divide cu 6.
b) Găsiți numerele naturale n pentru care 2^n-1 se divide cu 7.

Barem

a) Inducția matematică **(4p)**
b) Deoarece $2^{k+3}-1=8\cdot 2^k-1=7.\ 2^k+(2^k-1)$, avem P(k)⇔P(k+3) **(2p)**
Cum P(0) adevărată și P(1), P(2) false, deducem ca n∈ {0, 3, 6, …, 3k, …} **(1p)**

CONCURSUL NAȚIONAL DE

MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală, 1 februarie 2020

BAREM DE CORECTARE - **Clasa a IX-a**

Subiectul 3

Fie a și b două numere reale și pozitive. Valorile expresiilor a + b, a−b, ab și $\frac{a}{b}$ așezate în ordine crescătoare sunt $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{7}{4}$. Aflați valorile numerelor reale și pozitive a și b.

Barem

Deoarece din cele patru valori date, nu avem nici unul negativ, considerăm: a > b, deci $\frac{a}{b}>1$

Astfel avem $\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$ sau $\frac{a}{b}=\frac{7}{4}$ **(2p)**

Dacă $\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$ atunci $\frac{a+b}{a-b}=7$. Din fracțiile din enunț doar $\frac{7}{4}:\frac{1}{4}=7$ deci, a + b= $\frac{7}{4}$,

adică a =1 , b = $\frac{3}{4}$. **(2p)**

Dacă $\frac{a}{b}=\frac{7}{4}$ atunci $\frac{a+b}{a-b}=\frac{11}{3}$. Dar $\frac{11}{3}$ nu face parte din fracțiile date în enunțul problemei. **(2p)**

Deci soluția unică a problemei este a =1 , b = $\frac{3}{4}$. **(1p)**

Subiectul 4

Pe latura (AB) și diagonala (AC) ale paralelogramului ABCD se iau punctele M, respectiv N, astfel încât $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. Arătați că punctele M, N, D sunt coliniare.

Barem

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)=-\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}=$$

$=-\frac{1}{30}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{6}\overrightarrow{MD}$ (pentru fiecare egalitate obținută se acordă un punct)

Din relația $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{6}\overrightarrow{MD}$ rezultă că punctele M, N și D sunt coliniare. **(1p)**

CONCURSUL NAȚIONAL DE

MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală, 1 februarie 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X-a

Subiectul 1

Fie $z\epsilon\mathbb{C}\backslash\{-1\}$ cu $|z|=1$. Demonstraţi că există $a\epsilon\mathbb{R}$ astfel încât $z=\frac{1+ai}{1-ai}$.

Barem

$z=\frac{1+ai}{1-ai}\Rightarrow a=\frac{z-1}{i(z+1)}$ **(2p)**

$\bar{a}=\frac{\bar{z}-1}{-i(\bar{z}+1)}$ **(1p)**

$z\cdot\bar{z}=|z|^2=1\Longrightarrow\bar{z}=\frac{1}{z}$ **(1p)**

$\bar{a}=\frac{\frac{1}{z}-1}{-i(\frac{1}{z}+1)}=\frac{z-1}{i(z+1)}$ **(1p)**

$\bar{a}=a\Rightarrow a\epsilon\mathbb{R}$ **(2p)**

Subiectul 2

Se consideră expresia $E(x)=\log_{3-x}(3+x)$.

a) Determinaţi mulţimea D pe care este definită expresia $E(x)$.

b) Arătaţi că $E(a)E(-a)=1, \forall a\in D$

c) Calculaţi $E(\sqrt{8})$.

Barem

a) condiţii $\begin{cases}3-x>0\\3-x\neq1\\3+x>0\end{cases}$ **(1p)**

Rezultă D=$(-3,3)-\{2\}$ **(1p)**

b)E(a)E(-a)=$\log_{3-a}(3+a)\cdot\log_{3+a}(3-a)$ **(1p)**

aducem la aceeaşi bază şi obţinem rezultatul 1 **(1p)**

c) $E(\sqrt{8})=\log_{3-\sqrt{8}}(3+\sqrt{8})=\log_{3-\sqrt{8}}\frac{(3+\sqrt{8})(3-\sqrt{8})}{(3-\sqrt{8})}$ **(2p)**

$\log_{3-\sqrt{8}}\frac{1}{(3-\sqrt{8})}$=1 **(1p)**

CONCURSUL NAȚIONAL DE

MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală, 1 februarie 2020

BAREM DE CORECTARE - **Clasa a X-a**

Subiectul 3

Fie funţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\begin{cases}(2m-1)x-2, x\le 1\\ 2x+3, x>1\end{cases}$.

a) Determinați valorile lui m pentru care funcţia f este injectivă.
b) Determinați valorile lui m pentru care funcţia f este surjectivă.
c) Determinați valorile lui m pentru care funcţia f este bijectivă.

Barem

a) Condiție 2m-1>0 $=> m \in \left(\frac{1}{2},\ \infty\right)$; **(1p)** $f_1(1) \le f_2(1) => m \in (-\infty, 4]$ **(1p)** $=> m \in \left(\frac{1}{2}, 4\right]$ **(1p).**

b) Condiție 2m-1>0 $=> m \in \left(\frac{1}{2},\ \infty\right)$; **(1p)** $f_1(1) \ge f_2(1) => m \in [4, \infty)$ **(1p)** $=> m \in [4, \infty)$ **(1p).**

c) Din a și b rezultă ca m=4. **(1p).**

Subiectul 4

Determinați funcția bijectivă $f: \boldsymbol{R} \to R, f(x) = ax + b$ cu $a, b \in \boldsymbol{R}$ și $a \neq 0$ a cărei inversă este funcția $g: \boldsymbol{R} \to R, g(x) = 2x - 5$

Barem

Functia bijectivă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=ax+b$ are ca inversă funcția $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ $g(t)=\frac{1}{a}t-\frac{b}{a}$, unde $a\in\mathbf{R}^*$ **(5p)**

Deci $a=\frac{1}{2}$ si $b=\frac{5}{2}$ **(2p)**.

CONCURSUL NAȚIONAL DE

MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală, 1 februarie 2020

BAREM DE CORECTARE - **Clasa a XI-a**

Subiectul 1

Fie funcția $f: R \to R$, f(x)=$\sqrt{16x^2+1}+4x-5$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$;

b) Câte asimptote admite graficul funcției f?

Barem

a) Suntem în cazul $\infty - \infty$. Facem o schimbare de variabilă, amplificăm cu conjugata expresiei și obținem: L $= \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{16x^2+1}-4x-5)$=$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{16x^2+1-16x^2-40x-25}{\sqrt{16x^2+1}+4x+5}$=$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-40x-24}{\sqrt{16x^2+1}+4x+5}$= …=-5 **(3 p)**

b) Din a) observăm că dreapta y=-5 este asimptotă orizontală spre $-\infty$. **(1 p)**

Spre ∞ nu există asimptotă orizontală. Căutăm asimptota oblică, de forma y=mx+n.

Obținem m=8 și n=-5. În concluzie y= 8x-5 este asimptotă oblică spre ∞ **(2 p)**

Deci graficul funcției f admite 2 asimptote. **(1 p)**

Subiectul 2

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&0\\3&0&0\end{pmatrix}$ şi $C(A)=\{X\in M_3(\boldsymbol{R}) | A\cdot X = X\cdot A\}$.

a) Să se arate că matricea $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}$ aparţine mulţimii $C(A)$.

b) Dacă matricea X este din $C(A)$ atunci X este de forma $\begin{pmatrix}a&0&c\\0&b&0\\3c&0&a\end{pmatrix}$.

c) Dacă matricea Y aparţine mulţimii $C(A)$ şi $Y^2=O_3$, atunci $Y=O_3$.

Barem

a) Verifică prin calcul direct că AB = BA (2p)

b) Obține X de forma căutată (2p)

c) Deduce necesitatea ca Y să fie de forma anterioară (1p)

Calculează Y^2 și finalizare (2p)

CONCURSUL NAȚIONAL DE

MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

Etapa locală, 1 februarie 2020

BARAREM DE CORECTARE - **Clasa a XI-a**

Subiectul 3

Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+x+x^2+...+x^n-(n+1)}{x-1}$, n $\in$ **N*.**

Barem

$$\lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2+...+x^n-(n+1)}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(1-1)+(x-1)+(x^2-1)+...+(x^n-1)}{x-1}=$$ ....**(2p)**

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)+(x-1)(x+1)+...+(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+1)}{x-1}=$$ ....**(2p)**

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left[1+(x+1)+...+(x^{n-1}+x^{n-2}+...+1)\right]}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left[1+(x+1)+...+(x^{n-1}+x^{n-2}+...+1)\right]=$$ ....**(2p)**

= 1+2+ ...+ n = $\dfrac{n(n+1)}{2}$ ....**(1p)**

Subiectul 4

Fie punctele A(4, 4), B(10, 2). Determinaţi punctul C situat pe dreapta d: x - 2y + 4 = 0 astfel încât aria triunghiului ABC să fie 5.

Barem

Fie C (a, b) $\Rightarrow$ A_{ABC} = $\dfrac{|\Delta|}{2}$ = 5 , $\Delta=\begin{vmatrix}4 & 4 & 1\\ 10 & 2 & 1\\ a & b & 1\end{vmatrix}=2a+6b-32$ …………. (2p)

$\Rightarrow$ |2a + 6b -32| = 10 $\Rightarrow$ 2a +6b -32 = ±10. (1)..........……………....**(2p)**

Dar C $\in$ d $\Rightarrow$ a -2b + 4 = 0 (2) . ……………………………………..**(1p)**

Rezolvând sistemele format din relaţiile (1) şi (2) obţinem

a = 6 şi b = 5 $\Rightarrow$ C_1 (6, 5) . ... **(1p)**

a = 2 şi b = 3 $\Rightarrow$ C_2 (2, 3) . ... **(1p)**

CONCURSUL NAȚIONAL DE

MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală, 1 februarie 2020

BAREM DE CORECTARE - **Clasa a XII-a**

Subiectul 1

Se consideră matricea $A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$, pentru x∈**R** şi mulţimea $G = \{A_x | x \in \mathbf{R}\} \subset M_3(\mathbf{R})$.

a) Să se verifice că $I_3 \in G$, unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Să se demonstreze că $A_x \cdot A_y = A_{x+y}, \forall x, y \in \mathbf{R}$.

c) Să se arate că $(G,\cdot)$ este grup comutativ.

Barem

$$\left.\begin{array}{l} A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \\ A_0 \in G \end{array}\right\} \Rightarrow I_3 \in G$$ **1p**

b) $A_x \cdot A_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x+y & 1 \end{pmatrix} =$

$= A_{x+y}, \forall x, y \in R$ **2p**

c) Conform punctului b) $A_x \cdot A_y = A_{x+y} \in$ G, $\forall x, y \in \mathbf{R} \Rightarrow$ G este parte stabilă a lui $M_3(R)$ în raport cu “·”.

G1) Asociativitatea . Înmulţirea matricelor pe mulţimea G este asociativă deoarece este operaţie indusă de înmulţirea matricelor pe $M_3(R)$.

G2) Comutativitatea: $\forall A_x, A_y \in G, A_x \cdot A_y = A_y \cdot A_x$

$$\left.\begin{array}{l} A_x \cdot A_y = A_{x+y}, \forall x, y \in \mathbf{R} \\ A_y \cdot A_x = A_{y+x} = A_{x+y} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{“· “ comutativă.}$$

G3) Elementul neutru:

$\exists A_0 = I_3 \in G$ astfel încât $A_x \cdot A_0 = A_0 \cdot A_x = A_x, \forall A_x \in G \Rightarrow A_0$ element neutru.

G4) Elementele simetrizabile:

$\forall A_x \in G, \exists A_{x'} \in G$ astfel încât $A_x \cdot A_{x'} = A_{x'} \cdot A_x = I_3$

$A_x \cdot A_{x'} = A_{x'} \cdot A_x = I_3 \Leftrightarrow A_{x+x'} = A_{x'+x} = A_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x+x' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x' = -x$

$\Rightarrow A_{x'} = A_{-x} \in G$ este simetricul lui A_x. **4p**

Adresa: Str. Mihai Eminescu, Nr. 11, 410019, Oradea
Tel: +40 (0) 259 41 64 54, **Tel./fax**: +40 (0) 359 43 62 07,
Fax: +40 (0) 259 41 80 16, +40 (0) 259 47 02 22,
Web: www.isjbihor.ro - **E-mail**: contact@isjbihor.ro

Etapa locală, 1 februarie 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII-a

Subiectul 2

Se consideră funcţiile $f, g: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \boldsymbol{R}$, definite prin $f(x) = \dfrac{e^x + \cos x}{e^x + \cos x + \sin x}$ şi $g(x) = \dfrac{\sin x}{e^x + \cos x + \sin x}$.

a) Să se calculeze $\int [f(x) + g(x)]dx$ şi $\int [f(x) - g(x)]dx$.

b) Să se arate că funcţiile f şi g admit primitive şi să se calculeze primitivele acestora.

Barem

a) Funcţiile f şi g sunt continue , deci şi funcţiile $f+g$, respectiv $f-g$ sunt tot continue, de unde rezulta că f, g, $f+g$, $f-g$ admit primitive pe intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ **(1p)**

$$\int \left[f(x) + g(x) \right] dx = \int \left(\frac{e^x + \cos x}{e^x + \cos x + \sin x} + \frac{\sin x}{e^x + \cos x + \sin x} \right) dx = \int dx = x + c$$

(2p)

$$\int \left[f(x) - g(x) \right] dx = \int \left(\frac{e^x + \cos x}{e^x + \cos x + \sin x} - \frac{\sin x}{e^x + \cos x + \sin x} \right) dx = \int \frac{\left(e^x + \cos x + \sin x\right)'}{e^x + \cos x + \sin x} = \quad \textbf{(2p)}$$

$$= \ln\left(e^x + \cos x + \sin x\right) + c$$

b) Notăm cu $I = \int f(x)dx$ şi $J = \int g(x)dx$. In aceste condiţii, din a) rezultă

$$\begin{cases} I + J = x \\ I - J = \ln\left(e^x + \cos x + \sin x\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = \frac{1}{2}\left(x + \ln\left(e^x + \cos x + \sin x\right)\right) + c_1 \\ J = \frac{1}{2}\left(x - \ln\left(e^x + \cos x + \sin x\right)\right) + c_2 \end{cases}$$

, unde $c_1, c_2 \in \boldsymbol{R}$. **(2p)**

CONCURSUL NAȚIONAL DE

MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

Etapa locală, 1 februarie 2020

BAREM DE CORECTARE - **Clasa a XII-a**

Subiectul 3

Pe **R** se defineşte legea de compziţie "*"astfel: $x * y = ax + by + c, \forall x, y \in \mathbf{R}$ unde $a, b, c \in \mathbf{R}$. Determinaţi constantele a, b, c ştiind că $(\mathbf{R}, *)$ este grup cu elementul neutru 3.

Barem

$x \circ 3 = 3 \circ x = x, \forall x \in \mathbf{R}$ **(1p)**. Pentru x=0 obţinem $3b + c = 0$ şi $3a + c = 0$ **(2p)** $\Rightarrow a = b$ **(1p)**. Pentru x=1 obţinem $a + 3b + c = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 1$ **(2p)** $\Rightarrow c = -2$ **(1p)**.

Subiectul 4

Fie $f : (-1, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{15x\sqrt{x+1}}{2}$. Să se determine a,b,c astfel încât funcţia $F : (-1, \infty) \to \mathbf{R}$, $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{x+1}$ să fie o primitivă a lui f .

Barem

$F'(x) = f(x), \forall x > -1$ **(1p)**

$$(2ax + b)\sqrt{x+1} + \frac{ax^2 + bx + c}{2\sqrt{x+1}} = \frac{15x\sqrt{x+1}}{2}, \forall x > -1 \text{ (2p)}$$

$$(15a - 15)x^2 + (4a + 3b - 15)x + 2b + c = 0, \forall x > -1. \text{ (1p)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5a - 15 = 0 \\ 4a + 3b - 15 = 0 \\ 2b + c = 0 \end{cases} \text{ (1p) } \Rightarrow a = 3, b = 1, c = -2. \text{ (2p)}$$

Adresa: Str. Mihai Eminescu, Nr. 11, 410019, Oradea
Tel: +40 (0) 259 41 64 54, **Tel./fax**: +40 (0) 359 43 62 07,
Fax: +40 (0) 259 41 80 16, +40 (0) 259 47 02 22,
Web: www.isjbihor.ro - **E-mail**: contact@isjbihor.ro