

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

“ADOLF HAIMOVICI”

Filiera teoretică – Profilul uman – specializarea Filologie, Științe Sociale

Etapa locală, 16 februarie 2019

Clasa a IX-a

Subiectul 1 (7 puncte)

Să se calculeze:

$$a) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2018 \cdot 2019}$$

$$b) \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Barem

$$a) \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n+1-n}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\text{De unde } \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2018 \cdot 2019} = 1 - \frac{1}{2019} = \frac{2018}{2019} \quad (3p)$$

$$b) \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+2) - n}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}$$

$$\text{Apoi avem } \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{n+2}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} - \frac{n}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{n \cdot (n+1)} - \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} \right]$$

$$\text{Dar } \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \text{ respectiv } \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \quad (2p)$$

Suma devine:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot (k+1) \cdot (k+2)} = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k \cdot (k+1)} - \frac{1}{(k+1) \cdot (k+2)} \right] = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{n+1} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) \right] = \\ & = \frac{1}{4} \cdot \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)} \quad (2p) \end{aligned}$$

Adresa: Str. Mihai Eminescu, Nr. 11, 410019, Oradea

Tel: +40 (0) 259 41 64 54, **Tel./fax:** +40 (0) 359 43 62 07,

Fax: +40 (0) 259 41 80 16, +40 (0) 259 47 02 22,

Web: www.isjbihor.ro - **E-mail:** contact@isjbihor.ro

Subiectul II (7 puncte)

Rezolvați inecuația $||x - 2| - 4| \leq 3, x \in \mathbb{R}$.

Barem

$$||x - 2| - 4| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq |x - 2| - 4 \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq |x - 2| \leq 7 \quad (2p)$$

$$1 \leq x - 2 \leq 7 \text{ respectiv } -7 \leq x - 2 \leq -1 \quad (2p)$$

$$1 \leq x - 2 \leq 7 \Leftrightarrow x \in [3, 9], \quad -7 \leq x - 2 \leq -1 \Leftrightarrow x \in [-5, 1] \quad (2p)$$

$$x \in [-5, 1] \cup [3, 9] \quad (1p)$$

Subiectul III (7 puncte)

Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit după formula $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n^2 + n$.

a) Determinați primii trei termeni ai șirului

b) Determinați formula termenului general și arătați că șirul este progresie aritmetică.

Barem

$$a) x_1 = 1 + 1 = 2, \quad x_2 = 4 + 2 - 2 = 4 \text{ și } x_3 = 9 + 3 - 4 - 2 = 6 \quad (2p)$$

$$b) x_1 + x_2 + \dots + x_n = n^2 + n, \text{ respectiv}$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1} = (n + 1)^2 + n + 1$$

$$\text{Scădem relațiile și avem } x_{n+1} = (n + 1)^2 + n + 1 - (n^2 + n)$$

$$\text{De unde } x_{n+1} = 2n + 2 = 2(n + 1) \text{ și } x_n = 2n \quad \forall n \geq 1 \quad (3p)$$

$$\text{Din definiția progresiei aritmetice } x_{n+1} - x_n = 2(n + 1) - 2n = 2 \quad \forall n \geq 1$$

$$\text{De unde rația este egală cu 2, iar șirul se află în progresie aritmetică (2p)}$$

Subiectul IV (7 puncte)

Fie triunghiul oarecare ABC . Se duc paralele la laturile sale prin vârfurile A, B și C care se intersectează în M, N și P . Arătați că pentru orice punct O din plan are loc:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}.$$

Barem Fie $MN \parallel AB, NP \parallel BC$ și $PM \parallel CA$.

Atunci $ABMC, ABCN$ și $CAPB$ sunt paralelograme (2p).

De aici deducem că punctele A, B, C sunt mijloacele laturilor triunghiului MNP . (1p)

$$\text{Atunci avem: } \overrightarrow{OA} = \frac{\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}}{2}, \quad \overrightarrow{OB} = \frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OM}}{2}, \quad \overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}}{2} \quad (2p)$$

Adunând relațiile, se obține egalitatea cerută. (2p)

Notă: Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.

Adresa: Str. Mihai Eminescu, Nr. 11, 410019, Oradea

Tel: +40 (0) 259 41 64 54, **Tel./fax:** +40 (0) 359 43 62 07,

Fax: +40 (0) 259 41 80 16, +40 (0) 259 47 02 22,

Web: www.isjbihor.ro - **E-mail:** contact@isjbihor.ro