CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

"ADOLF HAIMOVICI"

Profilul servicii , resurse naturale şi protecţia mediului
Profilul real specializarea ştiinţele naturii
Profilul tehnic

CLASA A XII-A

Subiectul I (7 puncte)

Determinați valorile numerelor reale a şi b astfel încât funcția $F:(-\frac{2}{3},+\infty)\to\boldsymbol{R}$, $F(x)=(ax+b)\sqrt{3x+2}$ să fie o primitivă a funcției $f:(-\frac{2}{3},+\infty)\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\sqrt{3x+2}$.

Barem

F primitivă a funcţiei f $\Leftrightarrow F'(x)=f(x)$, $\forall x\in(-\frac{2}{3},+\infty)$..................................1p

$F'(x)=\frac{(9ax+4a+3b)\sqrt{3x+2}}{6x+4}$..3p

Deci $\begin{cases}9a=6\\4a+3b=4\end{cases}$...1p

Se rezolvă sistemul şi se obţine a = $\frac{2}{3}$ şi b = $\frac{4}{9}$. 2p

Subiectul II (7 puncte)

Să se calculeze:

a) $\int\sqrt{x^2-1}dx,\ x>1$;
b) $\int\frac{x^6+1}{x^2+1}dx,\ x\in\boldsymbol{R}$;
c) $\int e^x\sin x\,dx,\ x\in\boldsymbol{R}$;

Barem

a)$\int\sqrt{x^2-1}dx=\int\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}dx=\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx-\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx=x\sqrt{x^2-1}-\int\sqrt{x^2-1}\,dx-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$..2p

Deci $\int\sqrt{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1}-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)+C$......................................1p

b) $\int \frac{x^6+1}{x^2+1}dx=\int \frac{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}{x^2+1}dx = \int (x^4-x^2+1)dx = \frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+x+C$...............2p

c) $\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\, dx$........1p

$\int e^x \sin x\, dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C$..1p

Subiectul III (7 puncte)

Pe mulțimea G=(-3,3) se consideră legea de compoziţie $x * y = \frac{9x+9y}{9+xy}$

a) Să se arate că (G,∗) este grup abelian.

b) Să se arate că funcția $f: G \to \boldsymbol{R},\ f(x) = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right)$ este izomorfism între grupurile (G,∗) și ($\boldsymbol{R}$,+).

Barem

a)Se arată că operația * este lege de compoziție internă pe mulțimea G ($\forall x, y \in G \Rightarrow x{*}y\epsilon G$..…..1p

Asociativitatea, comutativitatea……………………………………….....……….......2p

Existenţa elementului neutru e=0……………………………………….............……1p

Elementele simetrizabile sunt $x' = -x \in G, (\forall)x \in G$…………..…………………..1p

b) f morfism de grupuri⇔ $f(x * y) = f(x) + f(y), (\forall)x, y \in G$…………………......1p

f funcție bijectivă: ………………………..………………………………………1p

Subiectul IV (7 puncte)

Pe mulţimea $G = (1,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = 1+\log_3 x + \log_3 y$.

a) Să se arate că $x \circ y \in G$, pentru oricare $x, y \in G$.
b) Să se rezolve ecuaţia $3^x \circ 9^{2x} = 2019$.
c) Să se calculeze S= $(3^1 \circ 3^2) + (3^3 \circ 3^4) + (3^5 \circ 3^6) + ... + (3^{2017} \circ 3^{2018})$.

Barem

a)Fie $x, y \in (1,+\infty)$, $x \circ y = 1+\log_3 x + \log_3 y = 1+ \log_3 xy$. Deoarece $xy > 1 \Rightarrow$
$\log_3 xy > 0 \Rightarrow x \circ y = 1+\log_3 x + \log_3 y > 1$, oricare ar fi $x, y \in G$ 2p

b) $1+\log_3 3^x + \log_3 9^{2x} = 2019$.. 1p

$\Rightarrow 1+x+4x=2019 \Rightarrow 5x=2018 \Rightarrow x = \frac{2018}{5}$.................................. ....1p

d) $S= (3^1 \circ 3^2) + (3^3 \circ 3^4) + (3^5 \circ 3^6) + \ldots + (3^{2017} \circ 3^{2018})$
$=(1+2+1)+(3+4+1)+(5+6+1)+\ldots(2017+2018+1)$ 2p
$=\frac{2018 \cdot 2019}{2} + \frac{2018}{2} = \frac{2018 \cdot 2020}{2} = 2018 \cdot 1010$ 1p

Notă: *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.*