CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

"ADOLF HAIMOVICI"

Profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului
Profilul real specializarea științele naturii
Profilul tehnic

Etapa locală, 16 februarie 2019
Clasa a IX-a

Subiectul I (7 puncte)

a) Fie $a\epsilon\boldsymbol{Z}$. Demonstrați că numărul $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$ este pătrat perfect.

b) Demonstrați că oricare ar fi $a, b, c\epsilon\boldsymbol{R}$ are loc inegalitatea:

$$|2a+b-1|+|a-2b-3|+|3a-b-5| \geq 1.$$

Barem

a) Grupăm termenii și obținem $a(a+1)(a+2)(a+3)+1=(a^2+3a)(a^2+3a+2)+1$ **(1p)**

$=(a^2+3a)(a^2+3a)+2(a^2+3a)+1$ **(1p)**

$=(a^2+3a+1)^2$ **(1p)**

b) Deoarece $|x| \geq \pm x, \forall x \in R$, avem **(1p)**

$|2a+b-1|+|a-2b-3|+|3a-b-5| \geq 2a+b-1+a-2b-3-3a+b+5=1$ **(2p)**

Deci $|2a+b-1|+|a-2b-3|+|3a-b-5| \geq 1$**(1p).**

Subiectul II (7 puncte)

Calculați sumele următoare: a) $S_n=9+99+999+\cdots+\underbrace{9999 \ldots 9}_{n\, cifre}$

b) $S_n(x)=x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n, x \in \boldsymbol{R}$ și $n \in \boldsymbol{N}^*$.

Barem

a) $S_n=9+99+999+\cdots+\underbrace{9999 \ldots 9}_{n\, cifre}=(10-1)+(100-1)+\cdots+(10^n-1)$ **(1p)**

$S_n=\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n$ **(1p)**

$S_n=\frac{10(10^n-1)-9n}{9}$ **(1p)**

b) Calculăm $S_n(x) - xS_n(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n - nx^{n+1}$ **(1p)**

$=\frac{x(x^n-1)}{x-1} - nx^{n+1}$ **(1p)**

$S_n(x) = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}$ **(2p)**

Subiectul III (7 puncte)

Un elev parcurge cu bicicleta drumul de acasă până la școală. Știind că elevul parcurge în fiecare minut cu 25 de metri mai mult decât în minutul anterior și că el a parcurs în primul minut 100 de metri, determinaţi:

a) Ce distanță a parcurs elevul în al 10-lea minut?

b) Ce distanță parcurge de acasă până la școală, știind că elevul ajunge la școală după jumătate de oră ?

Barem

a) Recunoaşte progresia aritmetică cu $a_1 = 100$ şi $r = 25$ **(2p)**

Determină $a_{10} = 325$ m**(1p)**

b) Determină $a_{30} = 825$ **(2p)**

Distanţa parcursă de elev în 30 de minute $S_{30} = 13875$ m**(2p)**

Subiectul IV (7 puncte)

Fie ABCD un patrulater convex, O_1, O_2 mijloacele diagonalelor $[AC]$ respectiv $[BD]$. Dacă $4\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$, atunci arătați că ABCD este paralelogram.

Barem

Luăm M mijlocul lui CD **(1p)**

Atunci :

$$\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{O_1M} + \overrightarrow{MO_2} = \frac{\overrightarrow{AD}}{2} - \frac{\overrightarrow{BC}}{2} = \frac{4\overrightarrow{O_1O_2}}{2} = 2\overrightarrow{O_1O_2} \ \textbf{(4p)}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{O_1O_2} = 0 \Rightarrow O_1 = O_2$, adică ABCD paralelogram **(2p)**

Notă: *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.*