CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

"ADOLF HAIMOVICI"

Filiera teoretică – Profilul uman – specializarea Filologie, Ştiinţe sociale

Etapa locală, 16 februarie 2019

Clasa a XII-a

Subiectul I (7 puncte)

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze A^2 şi A^3.

b) Să se determine numerele reale x şi y astfel încât: $A^3 = xA + yA^2$.

Barem

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **2p**

$A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ **1p**

b) $xA + yA^2 = \begin{pmatrix} x+2y & 0 & x+2y \\ 0 & y-x & 0 \\ x+2y & 0 & x+2y \end{pmatrix}$ **2p**

Atunci obţinem sistemul $\begin{cases} x+2y=4 \\ -x+y=-1 \end{cases}$ **1p**

Finalizare $x = 2, y = 1$ **1p**

Subiectul II (7 puncte)

Fie mulţimea $G = \left\{ M(a) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Să se arate că $M(a) \cdot M(b) = M(a+b),\ \forall a, b \in \mathbb{R}$;

b) Să se determine matricele $M(a) \in G$ care verifică egalitatea $M(a) \cdot M(a^2) = M(0)$;

c) Să se calculeze suma $M(1) + M(2) + M(3) + \cdots + M(2019)$.

Barem

a) Verificarea egalităţii **2p**

b) $M(a) \cdot M(a^2) = M(a + a^2)$ **1p**

Se obţine ecuaţia $a + a^2 = 0$ **1p**

Scrierea matricelor $M(a)$ pentru $a \in \{-1, 0\}$..**1p**

c) Calculul sumei cu rezultatul $\begin{pmatrix} 2019 & -202 \cdot 2019 \\ 0 & 2019 \end{pmatrix}$..**2p**

Subiectul III (7 puncte)

Trei echipe de baschet participă la un campionat în care se joacă meciuri pe teren propriu şi în deplasare. Se ştie că fiecare echipă joacă 15 meciuri pe teren propriu, iar numărul meciurilor este dat de tabelul următor:

A	Meciuri câştigate	Meciuri egale	Meciuri pierdute
Echipa 1	10	1	
Echipa 2		5	1
Echipa 3	8		3

a) Scrieţi matricea A asociată meciurilor jucate de cele trei echipe pe teren propriu, completând poziţiile libere cu numărul corespunzător;

b) Ştiind că matricea $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ reprezintă punctele corespunzătoare pentru fiecare meci câştigat, meci egal, respectiv meci pierdut, scrieţi matricea care exprimă punctajul obţinut de fiecare echipa la toate meciurile jucate pe teren propriu;

c) Numărul meciurilor jucate în deplasare este dat de tabelul alăturat (B).
Aflaţi echipa câştigătoare la finalul campionatului.

B	Meciuri câştigate	Meciuri egale	Meciuri pierdute
Echipa 1	8	4	3
Echipa 2	8	3	4
Echipa 3	7	5	3

Barem

a)

$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 4 \\ 9 & 5 & 1 \\ 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}$...**2p**

b)$A \cdot P = \begin{pmatrix} 27 \\ 31 \\ 25 \end{pmatrix}$ **2p**

b)$A \cdot P + B \cdot P = \begin{pmatrix} 27 \\ 31 \\ 25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ 23 \\ 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 \\ 54 \\ 48 \end{pmatrix}$..**2p**

Echipa 2 câştigă campionatul **1p**

Subiectul IV (7 puncte)

Fie matricele $A = (2 \quad 1)$ şi $B = (5 \quad 8)$, $A, B \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{N})$. Aflaţi câte matrice X pătratice de ordinul 2 cu elemente numere naturale verifică egalitatea $A \cdot X = B$, unde $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$

Barem

Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ cu $a, b, c, d \in \mathbb{N}$...**1p**

$A \cdot X = (2a + c \quad 2b + d)$...**1p**

Avem atunci $2a + c = 5$ şi $2b + d = 8$...**1p**

Pentru numerele a şi c avem 3 cazuri $(a, c) \in \{(0,5), (1,3), (2,1)\}$...**2p**

Analog, pentru b şi d avem 5 cazuri $(b, d) \in \{(0,8), (1,6), (2,4), (3,2), (4,0)\}$...**1p**

Aşadar, vor fi 15 matrice X care verifică cerinţele problemei...**1p**

Notă: *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.*