CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

"ADOLF HAIMOVICI"

Filiera vocațională – Profilul uman – specializarea pedagogie

Etapa locală, 16 februarie 2019

Clasa a XII-a

Subiectul I (7 puncte)

Numim cod o matrice X de ordin 3 care are trei elemente egale cu 1, iar restul egale cu 0. Dacă, în plus, $\det X \neq 0$,codul se numește supercod.

a) Dați un exemplu de cod și un exemplu de supercod;

b) Dacă X este un supercod, arătați că pe fiecare linie și pe fiecare coloană există un singur 1;

c) Care este numărul codurilor pe care le putem forma?

Barem

a) Exemplu de cod:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$..**1p**

Exemplu de supercod:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$..**1p**

b) Fie X supercod, atunci pe fiecare linie (coloană) există cel puțin un 1

(în caz contrar, o linie (coloană) conține numai zerouri, deci $\det X = 0$).

....**1p**

Dar matricea are trei elemente egale cu 1.

În concluzie, pe fiecare linie și pe fiecare coloană există un singur 1. ………….......... **1p**

c) Trebuie completate 9 locuri cu trei de 1 și șase de 0 …………………………………**1p**

Trebuie alese 3 din cele 9 locuri și completate cu 1

Sunt C_9^3=84 coduri……………………………………………………………**2p**

Subiectul II (7 puncte)

Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & a & 2\\ 3 & 1 & 1\\ 1 & 0 & b\end{pmatrix}$, unde a ş ib sunt parametri reali.

a) Pentru $a = 2$, să se determine valorile parametrului real b, pentru care matricea A este inversabilă;

b) Pentru $a = 2$ şi $b = 1$, să se determine A^{-1} ,unde A^{-1}este inversa matricei A;

c) Fie ecuaţia de gradul al doilea$x^2 - x - 5 = 0$ ale cărei soluţii sunt x_1 şi x_2. Dacă $a = x_1$ şi $b = x_2$, să se calculeze determinantul matricei A.

Barem

a) Pentru $a = 2$, $\det A = -5b + 2 - 2 = -5b$. …………………………………………………………..**1p**

Matricea este inversabilă dacă şi numai dacă $\det A \neq 0$, de unde $-5b \neq 0 \Rightarrow b \neq 0$.

În concluzie matricea A este inversabilă pentru b număr real nenul…………………………………..**1p**

b)Pentru $a = 2$ şi$b = 1$ matricea devine $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $\det A = -5$……………………………………**1p**

Calculăm matricea adjunctă $A^{*}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & -1 & 5\\ -1 & 2 & -5\end{pmatrix}$

Atunci $A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^{*}=\frac{-1}{5}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & -1 & 5\\ -1 & 2 & -5\end{pmatrix}$……………………………………………………**2p**

c) Ecuaţia de gradul al doilea $x^2 - x - 5 = 0$ ale cărei soluţii sunt x_1 şi x_2 , verifică relaţiile lui Viète, de unde vom obţine $x_1 + x_2 = 1$ și $x_1 x_2 = -5$ ……………………………………………………………**1p**

$\det A = -3x_1 x_2 + x_1 + x_2 - 2$

Prin înlocuire se va obţine $\det A = 14$ ……………………………………………………………………..**1p**

Subiectul III (7 puncte)

Fie matricele M=$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$,I_2=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, A=M+2a I_2, cu a număr real.

a)Să se determine valorile parametrului real a , pentru care $\det(A) = 36$.

b)Pentru a=$\frac{1}{2}$, să se resolve ecuaţia matricială AX=M.

c)Să se verifice că A^2=4aA-4a^2I_2, pentru a număr real.

Barem

a)A=$\begin{pmatrix} 2a-2 & -1 \\ 4 & 2a+2 \end{pmatrix}$,atunci detA=(2a-2)(2a+2)+4=4a^2-4+4=4a^2……………………….....**1p**

4a^2=36 se obţine a_1=-3,a_2=3………………………………………………………………**1p**

b)Pentru a=$\frac{1}{2}$ se obţine det A=1≠0, Aeste inversabilă………………………………….....**1p**

Se obţine

A^{-1}=$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$…………………………………..**1p**

Soluţia ecuaţiei matriceale va fi X=A^{-1}M, deci X=$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$……………………………….**1p**

c)A=$\begin{pmatrix} 2a-2 & -1 \\ 4 & 2a+2 \end{pmatrix}$, calcul A^2…………………………………………………….....**1p**

Calcul 4aA-4a^2I_2 și concluzia…………………………………………………………..**1p**

Subiectul IV (7 puncte)

Fie numerele reale a, b**, *c*** și determinantul D= $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

a)Să se demonstreze că D=(b-a)(c-a)(c-b);

b)Să se arate că dacă D=0,atunci cel puţin două dintre numerele a,b,c sunt egale;

c)Să se arate că dacă a,b și c sunt numere întregi atunci D este un număr întreg par.

Barem

a)Scăzând prima linie din celelalte două obţinem:

D= $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$ ⇒D= (b-a)(c-a) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix}$ = (b-a)(c-a)(c-b)……………………………**3p**

b)Din punctul anterior avem D=(b-a)(c-a)(c-b). ………………………………………………………**1p**

D=0,atunci cel puţin două dintre numerele a,b,c sunt egale……………………………………………**1p**

c)Dintre cele 3 numere întregi *a*, *b*, *c*, cel puţin două au aceeaşi paritate, deci diferenţa lor este număr par.

Conform punctului **a)**, *D* este număr par……………………………………………………………………..**2p**

Notă: *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.*